

EL AGENTE REPRESENTATIVO Y EL PROBLEMA DE LA AGREGACIÓN

Emiliano Alvarez (FCEA-UdelaR, Uruguay)

ealvarez@ccee.edu.uy

Resumen

Analizaremos en este artículo el uso del agente representativo como unidad de análisis de los modelos económicos, enfocado en su utilización para agregar las preferencias de todos los individuos. Estudiaremos la historia de este proceso, sus virtudes y las críticas que han surgido desde distintas corrientes. Concluiremos con algunas recomendaciones al momento de emplear estos supuestos.

JEL: B41, D11, D70.

Contenido

1	Introducción	3
2	El agente representativo.....	3
2.1	Características	3
2.2	Orígenes del término	4
2.3	Conceptos de racionalidad implícitos	5
2.4	Economía y matemática.....	6
2.5	Reduccionismo.....	6
2.6	Críticas.....	8
3	La agregación en los modelos económicos	9
3.1	Introducción: cooperación entre individuos	9
3.2	Preferencias individuales y sociales	9
3.3	¿Qué implica <i>agregar</i> ?.....	10
3.4	¿Afecta a los resultados del modelo?.....	10
3.5	Alternativas.....	12
4	Reflexiones finales: buscando una síntesis.....	12

1 Introducción

La representación de los individuos, lejos de ser neutral al análisis de los problemas económicos, puede modificar en gran medida las conclusiones de los modelos. La representación de estos agentes ha adquirido diversas formas, pero la modelización a través del *agente representativo* ha sido la más popular, tanto en microeconomía como en macroeconomía.

A través de este agente representativo, se intenta reproducir el comportamiento de una firma, un mercado o una sociedad. Estudiaremos las consecuencias que tiene la utilización de este supuesto en los modelos económicos y durante el transcurso de este trabajo intentaremos responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué es el agente representativo?
- ¿Cuáles son los problemas inherentes a su formulación?
- ¿Tiene sentido la agregación de individuos en un solo agente?
- ¿Cuáles son las alternativas a este enfoque?
- ¿Por qué, pese a sus limitaciones, sigue siendo ampliamente utilizado en economía?

Al finalizar, realizaremos una síntesis de las ideas principales y algunas recomendaciones de lo que se espera, sean los desarrollos en el futuro de la ciencia económica.

2 El agente representativo

2.1 Características

Lo que se busca a través de este agente, es representar el comportamiento de todo el sistema a través de un individuo, que resulta de la agregación de todos los agentes de la economía. Kirman (1992) [15] afirma que esto ocurre por dos motivos: para dar fundamentos microeconómicos a los problemas agregados y para llegar a modelos con equilibrios únicos y estables.

Los fundamentos microeconómicos tienen su origen a partir de la crítica de Lucas (1976) [17], acerca de la sensibilidad de los modelos macroeconómicos de esa época a los cambios de régimen. La solución fue ir un paso hacia atrás, buscando las ecuaciones estructurales del sistema económico. Hands (2015) [8] analiza este problema e indica que los economistas de esa época buscaron como posibles unidades de análisis a los individuos (a través de sus gustos, representados por las

funciones de utilidad) y a las firmas (a través de la tecnología, representada a través de la función de producción). En Hartley (1997) [10] se explica que el razonamiento detrás de esta idea fue que se podrían estudiar los cambios de régimen sin el problema de la crítica de Lucas, en cuanto pudiera modelizarse la función de utilidad de los individuos.

Puede pensarse que esta forma de representar el comportamiento de las entidades grupales es conveniente para el análisis. Por una parte, facilita los cálculos (permite hacer un estudio analítico de las soluciones); por otra parte, permite llegar a soluciones que contemplen equilibrios únicos y estables, lo que además permite estudiar la estática comparativa de los modelos.

Otra justificación para el uso del agente representativo, según Hartley (1997) [10] es que se utiliza para poder construir modelos Walrasianos de equilibrio general. Estos modelos buscan una asignación que sea óptima en el sentido de Pareto para una sociedad. En Hands (2015) [8] se explica que al utilizar el agente representativo, lo que hacemos es un problema análogo, pero más simple: la maximización de la utilidad individual, sujeta a restricciones de recursos y tecnológicas. Este vínculo se explica porque el óptimo de este agente (al ser el único individuo en la sociedad), es el óptimo de la sociedad, por lo tanto es un óptimo en el sentido de Pareto. La consecuencia de esto es que los precios calculados en este problema de maximización individual, son los resultantes de un equilibrio competitivo.

2.2 Orígenes del término

Desde los comienzos de la disciplina, se ha estudiado al individuo de diversas formas, siendo el objeto de análisis de gran parte de las corrientes en economía. En Foley (2002) [6] se hace un repaso de estas ideas sobre el individuo como unidad de análisis, desde los clásicos hasta hoy.

Podemos encontrar en Hartley (1996) [9] y Davis (2003) [3] que existe un acuerdo acerca del origen del agente representativo, a partir de la “firma representativa” de Alfred Marshall (1920[1891]) [20]. Lo que intenta Marshall, según Davis (2003) [3], es entender el comportamiento individual (que fue estudiado por los clásicos desde un punto de vista subjetivo) a través de las elecciones de los agentes.

Las críticas a la “firma representativa” de Marshall durante la primera mitad del siglo XX fueron, ante todo, debido a la falta de sustento empírico de muchos de sus

enunciados. En Schohl (1999) [27] se hace una revisión histórica de esta controversia, junto con el consenso generalizado entre los economistas de la época, incluido Keynes, de la importancia que tuvo *Principles of Economics* en el desarrollo de la disciplina.

La teoría de la utilidad marginal, junto con la aparición del agente representativo, llevaron a una eliminación progresiva de la subjetividad. Esto lleva, según Davis (2003) [3], a que se elimine la idea de individuos independientes entre sí; la teoría pasó a ser entonces, acerca de la racionalidad.

2.3 Conceptos de racionalidad implícitos

Es importante entonces, la discusión acerca de la racionalidad implícita en las expectativas de los agentes. La hipótesis de las expectativas racionales, que surge a partir de Muth (1961) [22], sigue la premisa que los agentes económicos no tienen errores de forma sistemática. Puede derivarse de esta idea que el valor esperado es igual al verdadero valor. Para Hartley (1997) [10], con el enfoque de expectativas racionales, se ignoran las heterogeneidades de información entre agentes.

Las expectativas racionales para Sent (1998) [28] se derivan del principio de optimización, extendido a las expectativas sobre eventos futuros. El principio de optimización utilizado, según Hoover (2009) [11], es el de la maximización de la utilidad individual. Este enfoque es beneficioso, según este autor, porque los resultados pueden obtenerse a partir del instrumental microeconómico. De esta forma, el planteamiento del problema de maximización intertemporal a partir de un agente representativo, es consistente con el enfoque de las expectativas racionales.

En Kirman (2014) [16] se estudia este paradigma, que se ha vuelto dominante en la teoría económica. Afirma que en este tipo de modelos se asume que los individuos comprenden incluso la forma en la cual va a evolucionar la economía. En su artículo se establece que, para que exista coordinación, las expectativas de los individuos no deben ser perfectamente racionales. Plantea también las connotaciones negativas de realizar recomendaciones de políticas, basadas en estos supuestos sobre las expectativas de los agentes.

En Hands (2011) [7], se estudia cómo ha ido evolucionando la teoría económica respecto a estos supuestos, llegando a la conclusión que los autores de finales del siglo XIX y principios del siglo XX tenían las mismas preocupaciones respecto a la racionalidad que la economía del comportamiento, de finales del siglo XX.

Según Hands (2015) [8], esta corriente comienza a partir de los trabajos de Kahneman y Tversky (1979) [12], donde las técnicas de la psicología fueron aplicadas al estudio de la toma de decisiones de los individuos. A partir de las heurísticas y sesgos identificados, también llamados *anomalías* (efecto encuadre, aversión a la pérdida, preferencias sociales, efecto dotación, descuento hiperbólico del tiempo, entre otras), se concluye que los individuos se comportan de forma inconsistente con las hipótesis de expectativas racionales.

2.4 Economía y matemática

Existe una clara relación entre los modelos económicos y las herramientas matemáticas y estadísticas empleadas. Las técnicas de cálculo de variaciones ya existentes, junto con los desarrollos en teoría del Control Óptimo a partir de Pontryagin et. al. (1960) [24] y en Programación Dinámica a partir de Bellman (1954) [1], permitieron un mayor desarrollo de los modelos de optimización.

En Sent (1998) [28] se explica que si bien estas herramientas ya se encontraban disponibles a partir de principios de la década de 1960, es recién a partir de mediados de esta década cuando son comprendidas y asimiladas por los economistas de la época. Éste es el motivo, según la autora, por el cual pasaron más de diez años entre las ideas de Muth (1961) [22] y la revolución de las expectativas racionales, a partir de la década de 1970.

En Davis (2003) [3] se plantea que la ciencia económica se ha ido modificando, como consecuencia del excesivo formalismo en los modelos económicos. Este autor concluye que el exceso de formalismo lleva a que los modelos económicos ya no busquen soluciones a problemas de coordinación de los mercados, sino que estudien sólo los problemas de teoría económica formal.

La modificación en el estudio de la ciencia económica ha llevado a que los individuos sean vistos por los economistas como objetos matemáticos. Davis (2003) [3] incluso argumenta que no sólo la economía ha sido modificada por estas herramientas, sino que también las concepciones de los economistas han sido modificadas.

2.5 Reduccionismo

Para la filosofía de la ciencia, *reducir* implica estudiar un fenómeno a partir de los elementos fundamentales. Puede ser válido preguntarse entonces si es posible

estudiar los fenómenos macroeconómicos a partir de las entidades microeconómicas.

Para que esto ocurra, King (2012) [14] propone que debe existir la manera de vincular ambas teorías. Kincaid (1997) [13] nos dice que si los eventos que ocurren a nivel macro pueden originarse a partir de distintas conformaciones de elementos a nivel micro, entonces la conexión no es clara entre ambos elementos y por lo tanto no es válido explicar los comportamientos macro a partir de una reducción a los elementos micro.

Los resultados de Sonnenschein-Mantel-Debreu (SMD) (Sonnenschein (1973) [29]; Mantel (1974 [18], 1976 [19]); Debreu (1974) [4]) y los avances posteriores, sistematizados en Rizvi (2006) [26], nos dicen que no existen restricciones a las funciones de exceso de demanda. La teoría microeconómica de la firma y las teorías Walrasianas, llegaban a sus postulados basados en ciertas restricciones sobre estas funciones de demanda; como estas restricciones no existen, los resultados dejaron de ser generales. En términos de Kincaid (1997) [13], no es válida la reducción a los componentes microeconómicos.

Plantea Davis (2003) [3] que estas funciones son elegidas arbitrariamente, por lo tanto el tipo de reduccionismo utilizado elimina muchos otros estados posibles, por lo tanto no puede tomarse como una teoría que contiene a todas las demás.

Hoover (2009) [11] estudia los motivos por los cuales se utilizan fundamentos microeconómicos para el análisis macroeconómico. Concluye que el reduccionismo aparece aquí por motivos diferentes a los utilizados en otras ciencias: en el resto de las ciencias, se busca que no exista una *intención* subyacente, que explique un determinado fenómeno de la naturaleza, sino que se explique a través de fenómenos físicos y químicos; los modelos económicos, en cambio, intentan explicar los comportamientos agregados a partir de decisiones, de intenciones de los agentes.

El agente representativo, según Davis (2003) [3] posee tres características: tiene una función de utilidad y una restricción presupuestaria; maximiza una función de utilidad y representa a todos los individuos, bajo el supuesto que éstos son homogéneos e idénticos. Si bien las dos primeras características son compartidas con los individuos de la población (supongamos que los individuos son seres racionales, maximizadores de utilidad), el agente representativo no es un caso

particular dentro de la población; es éste un agente ficticio, generado a partir del promedio de los agentes representados.

Aquí observamos otro aspecto del problema, que es la representatividad del agente representativo. Esta idea se desarrolla en Kirman (1992) [15].

2.6 Críticas

Hartley (1997) [10] critica la utilización del agente representativo para explicar fenómenos macroeconómicos. Argumenta que, aunque todos los agentes de esta economía posean las mismas preferencias, es de esperar que cualquier política gubernamental implique efectos distributivos. Como consecuencia, cambian los valores de los parámetros de las ecuaciones agregadas. Dicho de otra forma, este tipo de modelización no supera la crítica de Lucas.

Además de estas críticas, Kirman (1992) [15] indica que ante las mismas preferencias, las acciones del agente representativo y de los individuos representados pueden diferir, por lo tanto no es legítimo inferir elecciones sociales a partir de las particulares.

Un ejemplo de esta afirmación se muestra en la *Figura 1*, extraída de Kirman (1992) [15]. Se supone que la economía se compone de dos individuos, a y b , que eligen las cestas de consumo (x_a, x_b) cuando la restricción es BD , mientras que eligen las cestas de consumo (y_a, y_b) cuando la restricción es AE . Puede verse, a partir de las curvas de indiferencia que pasan por esos puntos, que tanto a como b prefieren la cesta x a la cesta y .

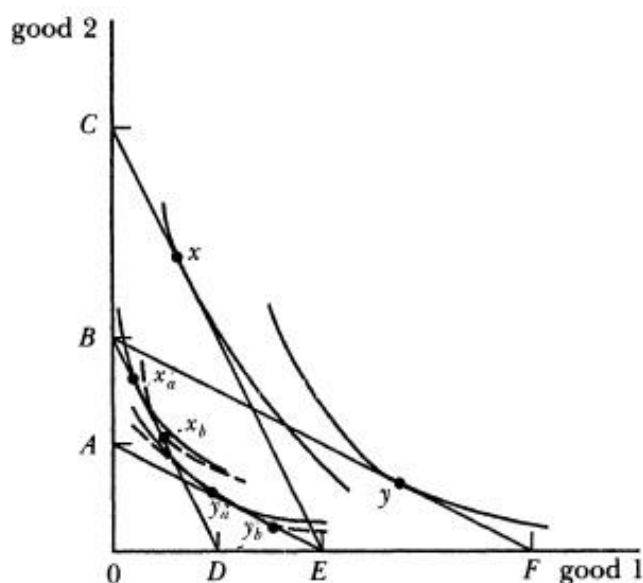


Figura 1: Agente representativo como combinación de dos agentes. Fuente: Kirman (1992) [15]

Supongamos ahora que esta economía puede representarse utilizando un agente representativo, cuyas restricciones son las del total de la economía; en este caso, la cesta de consumo x es óptima bajo la restricción CE, mientras que la cesta de consumo y es óptima bajo la restricción BF. Lo que ocurre en este sencillo ejemplo, es que el agente representativo prefiere la cesta y a la cesta x , lo opuesto a lo que prefieren todos los agentes de esta economía.

Por último, plantea también que no existe una justificación formal por la cual un grupo de individuos se comportaría como uno solo, ya que la maximización individual no implica necesariamente una maximización grupal.

3 La agregación en los modelos económicos

3.1 Introducción: cooperación entre individuos

En la realidad, las personas están organizadas en grupos o firmas, donde existe una determinada coordinación. Bowles & Gintis (2011) [2] estudian este problema y lo definen a partir de la cooperación entre los individuos.

Estos autores explican que la cooperación se logra a través de sistemas de socialización y de protección ante el comportamiento altruísta, por lo tanto cobran relevancia las instituciones al momento de estudiar los procesos de interacción económicos. En este contexto, las instituciones surgen para favorecer los comportamientos cooperativos, de los cuales se obtienen mejores pagos respecto de la competencia por recursos dentro de los grupos. La dinámica evolutiva promueve entonces la búsqueda del interés propio y los comportamientos cooperativos para obtener mayores beneficios.

3.2 Preferencias individuales y sociales

Cuando a partir de un comportamiento maximizador no cooperativo de los individuos llegamos a equilibrios Pareto-ineficientes, nos encontramos frente a los llamados dilemas sociales. La teoría de juegos estudia varios de estos casos, por ejemplo el “dilema del prisionero” y la “tragedia de los comunes”, entre otros. En estos casos, el equilibrio de Nash implica no cooperar; sin embargo, Bowles & Gintis (2011) [2]

señalan que existe abundante evidencia empírica que muestra que los individuos cooperan ante la ocurrencia de estos dilemas sociales.

Los autores explican estos resultados indicando que las preferencias y creencias de los individuos son el producto de la evolución conjunta de los patrones genéticos y culturales. La información que no se logra transmitir por los genes, llega a la siguiente generación a través de la cultura. Llamamos a este mecanismo “dinámica genética”, a través del cual los mejores pagos relativos influyen la evolución de la población, tendiendo a aumentar la proporción de individuos que cooperan; incluso se indica que los grupos actúan como si utilizaran algoritmos de optimización. Volveremos a esta idea más adelante.

3.3 ¿Qué implica agregar?

Davis (2003) [3] enuncia que la teoría económica toma al individuo como dado, siendo estos individuos y su subjetividad exógenos a los procesos. Por lo tanto, llama la atención acerca de la importancia de tomar en cuenta la identidad de los individuos, su individualidad. Para este autor, la agregación implicaría perder la esencia misma de los individuos.

Hands (2015) [8] afirma que el problema de la agregación surge porque sólo bajo condiciones muy restrictivas, con individuos que dependen de sus preferencias y están sujetos a restricciones, se puede llegar a un comportamiento que sea similar al generado por un solo agente. Se discute sobre los modelos en que son múltiples los agentes que deciden pero que se reducen a uno solo.

Este autor aclara que no en todos los modelos donde hay un agente representativo ocurre este problema: en los modelos donde hay un planificador centralizado, como en Ramsey (1928) [25], éste es el único que toma decisiones. Por lo tanto, es reduccionista pero no es eliminativo, en el sentido de Davis (2003) [3].

3.4 ¿Afecta a los resultados del modelo?

En los modelos económicos, muchas veces no se enuncia o no se le da la importancia necesaria a explicar el mecanismo a través del cual ocurre la agregación de las decisiones individuales. Existe un amplio conocimiento de lo que ocurre a nivel microeconómico y macroeconómico; sin embargo, Hartley (1997) [10] afirma

que si no encontramos una forma robusta de vincularlas, el problema se encuentra en el método de agregación.

Este autor argumenta que el enfoque de los fundamentos microeconómicos está equivocado, ya que esta metodología asume que los métodos de agregación son correctos. Las interacciones entre agentes dan lugar a patrones reconocibles, pero sin embargo no conocemos la forma de agregación. Para este autor, no existen motivos para escribir las ecuaciones a partir del agente representativo, respecto a escribirlas a partir de entidades macroeconómicas.

Siguiendo la descripción realizada por Edgeworth (1925) [5], la función de bienestar social puede estudiarse siguiendo el criterio de Bentham o el criterio de Mill. Según Bentham, el bienestar total es igual a la suma del bienestar per cápita, mientras que según Mill, el bienestar es igual al promedio (o a la utilidad per cápita).

Explica Edgeworth (1925) [5] que la diferencia entre ambos modelos es el efecto del crecimiento de la población en el consumo per cápita; es independiente del consumo según el criterio de Bentham, mientras que depende del consumo per cápita según el criterio de Mill. Este autor conjetura que el crecimiento de la población es mayor según el criterio de Bentham, lo cual retoman Nerlove, Razin & Sadka (1985) [23] en un modelo de consumo intertemporal.

3.4.1 Ejemplo: criterios de agregación de la utilidad individual

Este ejemplo figura en Marsiglio & La Torre (2012) [21], donde, sujeto a restricciones, el planificador central busca maximizar el consumo en el siguiente problema intertemporal:

$$\max_{c_t, u_t} \int_0^{\infty} \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} N_t^{1-\varepsilon} e^{-\rho t} dt$$

Donde $e^{-\rho t}$ es el factor de descuento intertemporal, N_t es el total de la población en el momento t y ε es un parámetro que permite modelizar el grado de altruísmo. Lo importante en este modelo es que nos permite visualizar, cuando $\varepsilon=0$, una función de bienestar social según el criterio de Bentham, mientras que cuando el parámetro $\varepsilon=1$, nos permite estudiar una función de bienestar social según el criterio de Mill. Una de las conclusiones de este modelo es que, cuando la tasa de crecimiento de la población es constante, la función de bienestar social según Bentham ($\varepsilon=0$) está asociada a una mayor tasa de crecimiento del consumo que la función de bienestar

social según el criterio de Mill ($\epsilon=1$). Por lo tanto, vemos que diferentes formas de agregación llevan a diferentes valores de equilibrio.

3.5 Alternativas

Cuando el problema al que nos enfrentamos se complejiza, Kirman (1992) [15] indica que desaparecen las capacidades del agente representativo. Una opción es estudiar estos problemas desde la teoría de juegos, pero este autor afirma que si los jugadores son simétricos (iguales entre sí) el problema sigue siendo el mismo.

La solución que este autor ofrece es modelizar las interacciones entre individuos de forma tal que operen en un subconjunto de la población; estas interacciones locales pueden dar lugar a una auto-organización que provea de regularidad al sistema. Los juegos evolutivos ofrecen un marco para este tipo de interacciones, donde se evoluciona hacia un cierto tipo de equilibrio. Estos equilibrios, que se presentan como ciclos y fluctuaciones, no ocurren ante la presencia de un shock, sino que son parte del proceso de interacción.

Davis (2003) [3] entiende que la teoría de juegos también es el marco adecuado para estudiar los problemas de coordinación e interdependencia, donde además el reduccionismo no está planteado en términos de los individuos, sino del conocimiento común y del alineamiento de las creencias de los individuos. Los juegos con horizonte infinito logran ilustrar cómo a partir de individuos no cooperativos pueden lograrse incentivos a la cooperación.

4 Reflexiones finales: buscando una síntesis

En este trabajo, hemos estudiado una de las formas de representar a los individuos más utilizada en los modelos económicos, que forma parte de la corriente dominante en la profesión. La mayor parte de los desarrollos teóricos y de las recomendaciones de políticas económicas en el último medio siglo, de forma implícita o explícita, están basados en este tipo de modelización de los agentes económicos.

Si bien hemos resaltado muchas de las inconsistencias que tiene esta formalización, la auto-organización que ocurre como consecuencia de las interacciones entre los individuos, definida en los términos que establece Kirman (1992) [15] hace que las soluciones grupales sean similares a las esperables bajo maximización de la utilidad. Para Hands (2015) [8], la racionalidad sería una propiedad inherente a los mercados

y las instituciones, no a los individuos. Esto nos permitiría estudiar el óptimo de los comportamientos agregados sin estudiar la racionalidad de los individuos, ya que el foco de estos modelos es el comportamiento agregado.

Sin embargo, Kirman (1992) [15] indica que aunque el comportamiento a nivel macroeconómico exhiba regularidades, no implica que deba tratarse a la economía como el comportamiento de un solo individuo.

Por todo esto, sería esperable que la teoría económica se ocupe de este problema, estudiando el comportamiento grupal (auto-organizado y eficiente) a partir del comportamiento de individuos heterogéneos y con racionalidad limitada, vinculando el universo macroeconómico y microeconómico a partir de formas de interacción y de agregación que no eliminen la individualidad (heterogeneidad) de los agentes económicos.

Referencias

- [1] BELLMAN, R. The theory of dynamic programming. *Bulletin of the American Mathematical Society* 60, 6 (1954), 503–515.
- [2] BOWLES, S., AND GINTIS, H. *A cooperative species: Human reciprocity and its evolution*. Princeton University Press, 2011.
- [3] DAVIS, J. B. *The theory of the individual in economics: Identity and value*. Routledge, 2003.
- [4] DEBREU, G. Excess demand functions. *Journal of Mathematical Economics* 1, 1 (1974), 15–21.
- [5] EDGEWORTH, F. Y. *Papers relating to political economy*. Macmillan and Co., London, 1925.
- [6] FOLEY, D. The strange history of the economic agent. *Department of Economics-Graduate Faculty, New School University, New York, United States of America* (2002).
- [7] HANDS, D. W. Back to the ordinalist revolution: Behavioral economic concerns in early modern consumer choice theory. *Metroeconomica* 62, 2 (2011), 386–410.
- [8] HANDS, D. W. The contemporary conundrum: Behavioral Economics, Rational Choice Theory, and the Representative Agent. *Rational Choice Theory, and the Representative Agent (February 10, 2015)* (2015).
- [9] HARTLEY, J. E. Retrospectives: The origins of the representative agent. *The Journal of Economic Perspectives* 10, 2 (1996), 169–177.
- [10] HARTLEY, J. E. *The Representative Agent in Macroeconomics*, vol. 10. Psychology Press, 1997.
- [11] HOOVER, K. D. Microfoundations and the ontology of macroeconomics. *The Oxford handbook of the philosophy of economics* (2009), 386–409.
- [12] KAHNEMAN, D., AND TVERSKY, A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1979), 263–291.
- [13] KINCAID, H. *Individualism and the unity of science: Essays on reduction, explanation, and the special sciences*. Rowman & Littlefield, 1997.
- [14] KING, J. E. *The Microfoundations Delusion: Metaphor and Dogma in the History of Macroeconomics*. Edward Elgar Publishing, 2012.
- [15] KIRMAN, A. P. Whom or what does the representative individual represent? *The Journal of Economic Perspectives* 6, 2 (1992), 117–136.

- [16] KIRMAN, A. P. Is it rational to have rational expectations? *Mind & Society* 13, 1 (2014), 29–48.
- [17] LUCAS, R. E. Econometric policy evaluation: A critique. In *Carnegie-Rochester conference series on public policy* (1976), vol. 1, Elsevier, pp. 19–46.
- [18] MANTEL, R. R. On the characterization of aggregate excess demand. *Journal of Economic Theory* 7, 3 (1974), 348–353.
- [19] MANTEL, R. R. Homothetic preferences and community excess demand functions. *Journal of Economic Theory* 12, 2 (1976), 197–201.
- [20] MARSHALL, A. *Principles of Economics*, 8 ed. Macmillan London, 1920.
- [21] MARSIGLIO, S., AND LA TORRE, D. Population dynamics and utilitarian criteria in the Lucas–Uzawa model. *Economic Modelling* 29, 4 (2012), 1197–1204.
- [22] MUTH, J. F. Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1961), 315–335.
- [23] NERLOVE, M., RAZIN, A., AND SADKA, E. Population size: individual choice and social optima. *The Quarterly Journal of Economics* (1985), 321–334.
- [24] PONTRYAGIN, L. S., BOLTYANSKII, V. G., AND GAMKRELIDZE, R. V. Theory of optimal processes. I. The maximum principle. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* 24, 1 (1960), 3–42.
- [25] RAMSEY, F. P. A mathematical theory of saving. *The economic journal* 38, 152 (1928), 543–559.
- [26] RIZVI, S. A. T. The Sonnenschein-Mantel-Debreu results after thirty years. *History of Political Economy* 38, Suppl 1 (2006), 228–245.
- [27] SCHOHL, F. The paradoxical fate of the representative firm. *Journal of the History of Economic Thought* 21, 1 (1999), 65.
- [28] SENT, E. M. *The evolving rationality of rational expectations: An assessment of Thomas Sargent's achievements*. Cambridge University Press, 1998.
- [29] SONNENSCHNEIN, H. Do Walras' identity and continuity characterize the class of community excess demand functions? *Journal of economic theory* 6, 4 (1973), 345–354.