

Anales del VII CONGRESO NACIONAL DE ESTUDIANTES DE POSTGRADO EN ECONOMÍA (CNEPE)

*DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR*

*INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS Y SOCIALES DEL SUR (IIESS)
CONICET - UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR*

Bahía Blanca

Mayo de 2015

ISBN: 978-987-1648-39-9



Departamento de Economía



I I E S S

Estudio de la relación entre inflación y tasa desempleo en Uruguay mediante sistemas dinámicos no lineales.

Fernández Raíz Diego Gabriel

Estudio de la relación entre inflación y tasa desempleo en Uruguay mediante sistemas dinámicos no lineales

Diego G. Fernández

(Facultad de Ciencias Económicas y Administración - Facultad de Ingeniería)

dgfernandez2010@gmail.com

ABSTRACT

Se analiza la relación entre inflación y tasa de desempleo usando la metodología desarrollada en Fernández. D (2014) a partir del análisis de recurrencia en sistemas dinámicos no lineales y se compara con métodos lineales. El marco teórico de este estudio es la Dinámica caótica y no se plantea una teoría explícita entre inflación y desempleo.

Se estudia en primer lugar la dinámica de ambas series con datos mensuales entre el periodo enero 1991 a febrero 2014 de Uruguay. Se muestra la adecuación de las medidas de complejidad para describir la volatilidad de las series temporales analizadas no viéndose modificada por cambios estructurales. En segundo lugar se estudia el grado de sincronización que se observa entre ambas series. En base a medidas de complejidad se encuentra que la fuerza de la sincronización entre las trayectorias es fuerte con cambios importantes que definen tres períodos. En el caso del periodo que va de octubre 2000 a enero 2010 la sincronización entre la tasa de desempleo e inflación toman un signo positivo o sea que se estarían moviendo juntas.

Este estudio pretende ser un primer paso en la aplicación de estas metodologías en la economía de Uruguay y abre la puerta a futuras investigaciones.

JEL: C6 E31 E24

ese momento el análisis de la relación entre desempleo – inflación cuenta con una larga historia en la teoría económica y ha generado varios enfrentamientos entre escuelas de pensamiento económico.

El objetivo de esta investigación es estudiar los patrones de dinámica en las series de inflación y tasa de desempleo en Uruguay en el período comprendido entre enero de 1991 a febrero de 2014 mediante la aplicación de la metodología desarrollada en Fernández, D. (2014) basada en el análisis de recurrencia de sistemas dinámicos no lineales. La importancia conceptual de esta metodología radica en que permite captar patrones subyacentes no lineales en la dinámica de series temporales.

En primer lugar se analiza la trayectoria de las series de forma separada estudiando la dinámica de cada serie mediante una aplicación del análisis de recurrencia. En segundo lugar se estudia el grado de sincronización o dependencia que existe entre ambas series mediante una aplicación del análisis de recurrencia conjunta. En ambos casos se comparan los resultados con los estadísticos lineales de varianza y coeficiente de correlación de Pearson respectivamente.

La pertinencia del análisis de dependencia radica en que si fueran independientes las trayectorias entre la inflación y el desempleo carecería de sentido plantear una relación de casusa efecto como se postula en la ecuación de Phillips. Se aclara que no es el objetivo de este estudio encontrar una ecuación de Phillips pero si analizar el tipo de relación entre las variables de interés.

El aporte de este estudio radica en ser la primera aplicación de una nueva metodología de análisis de series temporales para series de la economía de Uruguay. Por lo tanto abre la puerta a futuras investigaciones que busquen replicar los resultados encontrados y permitan encontrar extensiones en la metodología propuesta.

Dados los objetivos planteados se estructura este trabajo de la siguiente manera. En la segunda parte se presentan conceptos de sistemas dinámicos no lineales y del análisis de recurrencia que son la base conceptual de este estudio. En la tercera parte se presenta un resumen de la metodología desarrollada en Fernández, D. (2014) para el análisis de series temporales de forma univariada y bivariada. En la cuarta parte se realiza la aplicación empírica. Finalmente se presentan las conclusiones de la investigación y se abre la puerta a futuras investigaciones.

2. ANÁLISIS DE RECURRENCIA EN SISTEMAS DINÁMICOS

A continuación se presenta un breve resumen de los conceptos de recurrencia y de sistemas dinámicos que son la base de la metodología aplicada en este estudio en base a Fernández, D. (2014).

2.1 Concepto de recurrencia y sistemas dinámicos

El concepto de recurrencia fue introducido por Henri Poincaré en su trabajo seminal de 1890. La recurrencia es una propiedad fundamental presente en sistemas dinámicos que puede ser explotada para caracterizar su comportamiento. Existen varios tipos de recurrencia. En este trabajo se analiza el tipo de recurrencia basada en el teorema de recurrencia de Poincaré: Sea T una medida que preserva una transformación en un espacio de probabilidad (\mathcal{X}, μ) y sea $A \subset \mathcal{X}$ un conjunto medible. Entonces para cualquier número natural N $\mu\left(x \in A / \left\{T^n(x)\right\}_{n \geq N} \subset \mathcal{X} / A\right) = 0$. Esto significa que si tenemos una transformación que preserva la medida, la trayectoria retornará eventualmente hacia la vecindad de cualquier punto anterior con probabilidad uno.

Formalmente, un sistema dinámico viene dado por (1) un espacio de fases, (2) un tiempo continuo o discreto y (3) una ley de evolución temporal. Los elementos o “puntos” del espacio de fases representan estados posibles del sistema. Vamos a suponer que el estado de un sistema en un momento fijo del tiempo t puede especificarse mediante d componentes.

Estos parámetros pueden ser considerados formando un vector $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))^T$ en el espacio de fases d dimensional del sistema. Es decir que debemos considerar a d como una dimensión artificial que permite definir un sistema dinámico al que se le va a estudiar la recurrencia. En una configuración general, la ley de evolución temporal es una regla que permite determinar el estado del sistema en cada momento t a partir de los estados para todos los instantes previos.

2.2 Gráficos de Recurrencia

Eckmann et al (1987) introducen el método de gráfico de recurrencia (GR) para visualizar recurrencias en sistemas dinámicos. La representación de Eckmann permite observar patrones de recurrencia en sistemas dinámicos y sus trayectorias. Por ejemplo, consideremos tres sistemas prototipos¹ llamados movimiento periódico de un círculo (Figura A), el sistema caótico de Rössler (Figura B) y un ruido blanco (Figura C).

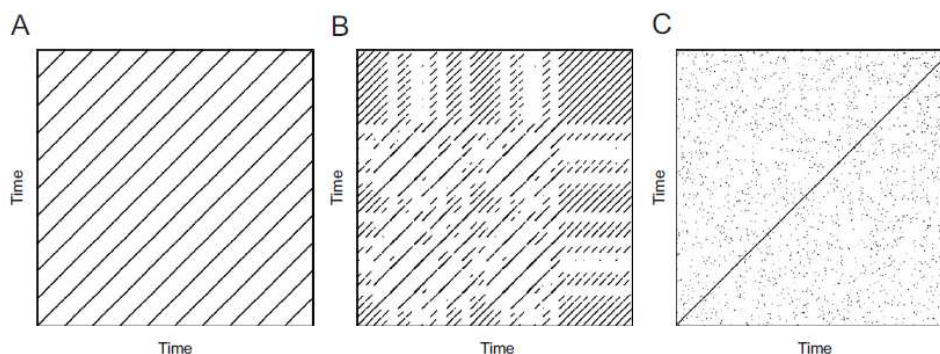


Fig. 1. Recurrence plots of (A) a periodic motion with one frequency, (B) the chaotic Rössler system (Eq. (A.5) with parameters $a = b = 0.2$ and $c = 5.7$) and (C) of uniformly distributed noise

¹ Ejemplos extraídos de Eckman et al (1987).

En todos estos sistemas es posible observar la recurrencia pero los patrones de los puntos son muy diferentes. El movimiento periódico se refleja en diagonales largas e ininterrumpidas. La distancia vertical entre estas líneas corresponde al período de oscilación. El sistema caótico de Rossler también contiene diagonales que son más cortas. El gráfico de recurrencia de una señal ruido blanco consiste en muchos puntos negros simplemente. La distribución de puntos en el gráfico de recurrencia luce de forma errática.

Dados los tres ejemplos, se puede conjeturar que cuanto más cortas sean las diagonales en el gráfico de recurrencia menos predecible será el sistema. Esta conjetura fue realizada por Eckmann et al (1987) quienes sugirieron que la inversa de la diagonal más larga (excepto la diagonal principal) es proporcional al mayor exponente de Lyapunov del sistema.

Dado que el objetivo es el estudio de la recurrencia en los estados de sistemas dinámicos es necesario comenzar por definir la herramienta mediante la cual poder medir las recurrencias en las trayectorias $\vec{x}_i \in R^d$ en el espacio de fases: el gráfico de recurrencia. Los vectores $\vec{x}(t)$ definen la trayectoria en el espacio de fases. Con datos experimentales, es común que no se tengan todos los datos relevantes para construir los vectores de estado o bien no se pueden medir. Un problema que surge radica en que lo que se observa no es un objeto en el espacio de fases sino una serie temporal, mejor dicho sólo una secuencia de mediciones escalares. Es necesario convertir las observaciones en vectores de estado. Este es el problema de reconstrucción de espacio de estado que es resuelto técnicamente por el método de los retardos. Cuando nos enfrentamos a una única observación medida en tiempo discreto. Esto lleva a un escalar y a una serie temporal discreta $u_i = u(i\Delta t)$, donde $i = 1, \dots, N$ y Δt es la tasa muestral de medida. En tales casos es necesario reconstruir el espacio de fases. Un método comúnmente utilizado para la reconstrucción es el método de los retardos planteado en

$$\text{Takens (1981)} \quad \hat{\vec{x}} = \sum_{j=1}^m u_{i+(j-1)\tau} \vec{e}_j$$

Dado un conjunto de números en una dimensión infinita, es decir, $(u_1, u_2, u_3, \dots) \in R^\infty$ se observa una realización de dimensión d del espacio multidimensional es decir $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_d) \in R^d$. El método de reconstrucción implica definir en primer lugar varios vectores de la forma

$$x(i) = \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+\tau} \\ \vdots \\ u_{i+(d-1)\tau} \end{pmatrix}$$

En donde m representa la dimensión de inmersión y τ representa el tiempo de retardo. Los vectores \vec{e} son vectores unitarios y comprenden un sistema de coordenadas ortogonales $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{i,j})$. Si $m \geq 2D_2 + 1$, donde D_2 es la dimensión de correlación del atractor, el

teorema de Takens y varias extensiones del mismo, garantizan la existencia de un difeomorfismo entre el atractor original y el reconstruido. Esto significa que ambos atractores pueden considerarse como representativos del mismo sistema dinámico en diferentes coordenadas del sistema.

Los GR permiten visualizar de forma eficiente recurrencias y pueden ser expresados de formalmente mediante la siguiente matriz de recurrencia (MR).

$$R_{i,j}(\varepsilon) = \Theta\left(\varepsilon - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|\right) \quad i, j = 1, \dots, N$$

Donde N es el número de puntos medidos \vec{x}_i , ε es el umbral de distancia, Θ es la función Heaviside tal que $\Theta(x) = 0$ si $x < 0$ y $\Theta(x) = 1$ en otro caso y $\|\cdot\|$ es una norma. Se introduce la siguiente notación para los estados que se encuentran en una vecindad ε : $\vec{x}_i \approx \vec{x}_j \Leftrightarrow R_{i,j} \equiv 1$. El GR se obtiene al graficar la MR y utilizando diferentes colores por ejemplo un punto negro en las coordenadas (i,j) si $R_{i,j} \equiv 1$ y un punto blanco si $R_{i,j} \equiv 0$. Ambos ejes de un gráfico de recurrencia representan tiempo. Dado que $R_{i,i} \equiv 1 \Big|_{i=1}^N$ por definición el gráfico de recurrencia tiene siempre una línea negra en la diagonal principal denominada la línea de identidad (LOI). Además, el gráfico de recurrencia es simétrico por definición respecto a la diagonal principal, es decir que $R_{i,j} \equiv R_{j,i}$.

Los GR se han postulado originalmente como herramientas cualitativas para detectar gráficamente ritmos ocultos (Eckmann et al., 1987). El siguiente paso fue promover un análisis cuantitativo de para evitar los problemas relacionados con los sesgos individuales de múltiples observadores e interpretaciones subjetivas de los gráficos de recurrencia que implicaba el primer tipo de análisis cualitativo. Estas medidas se basan en la densidad de los puntos de recurrencia y en las estructuras de las líneas verticales y diagonales en los gráficos de recurrencia. Para ver un desarrollo completo de las medidas de recurrencia se puede consultar Marwan et al. (2007).

2.3 Análisis de recurrencia conjunto

La extensión bivariada del GR permite estudiar la relación entre dos sistemas diferentes al examinar las ocurrencias de estados similares. Se considera las recurrencias de las trayectorias en sus espacios de fases respectivos de forma separada y se analizan los momentos en que ambos recurren simultáneamente, es decir, cuando se produce una recurrencia conjunta.

Por medio de esta aproximación se preservan los espacios de fases de ambos sistemas. Formalmente esto implica una extensión del espacio de fases a $R^{d_x+d_y}$, donde d_x y d_y son las dimensiones de los espacios de fases de los sistemas correspondientes y que son por lo general diferentes. A su vez se consideran dos umbrales diferentes para cada sistema, por lo

tanto los criterios para la elección del umbral apropiado pueden aplicarse de forma separada respetando la medida natural de ambos sistemas. Por lo tanto, es intuitivo introducir la matriz de recurrencia conjunta (JR) para dos sistemas \vec{x} y \vec{y}

$$JR_{i,j}^{\vec{x},\vec{y}}\left(\varepsilon^{\vec{x}},\varepsilon^{\vec{y}}\right)=\Theta\left(\varepsilon^{\vec{x}}-\|\vec{x}_i-\vec{x}_j\|\right)\Theta\left(\varepsilon^{\vec{y}}-\|\vec{y}_i-\vec{y}_j\|\right), \quad i,j=1,\dots,N$$

O de forma más general, para n sistemas $\vec{x}_{(1)},\vec{x}_{(2)},\dots,\vec{x}_{(n)}$ puede introducirse la matriz multivariada de recurrencia conjunta de la siguiente forma:

$$JR_{i,j}^{\vec{x}_{(1)},\dots,\vec{x}_{(n)}}\left(\varepsilon^{\vec{x}_{(1)}},\dots,\varepsilon^{\vec{x}_{(n)}}\right)=\prod_{k=1}^n R_{i,j}^{\vec{x}_{(k)}}\left(\varepsilon^{\vec{x}_{(k)}}\right), \quad i,j=1,\dots,N$$

En esta aproximación, una recurrencia ocurre cuando un punto \vec{x}_j en la primera trayectoria retorna a la vecindad de un punto anterior \vec{x}_i , y de forma simultánea un punto \vec{y}_j de la segunda trayectoria retorna a la vecindad de un punto anterior \vec{y}_i . Esto significa, que se estudia la probabilidad conjunta de ambas recurrencias (o n recurrencias, en el espacio multidimensional) sucedan de forma simultánea en sus respectivos espacios de fases. La representación gráfica de la matriz de $JR_{i,j}$ se denomina JRP. La definición de la ecuación de GR es un caso especial de la definición de JRP para un solo sistema.

3. METODOLOGÍA EMPLEADA

Para cumplir los objetivos de este trabajo se realiza una adaptación de la metodología desarrollada en Fernández, D. (2014) para el análisis de las trayectorias de índices de precios bursátiles de forma univariada y conjunta. Se introduce por un lado un índice que permite estudiar la volatilidad denominado ICI (índice complejo de inestabilidad) en una serie temporal en base a medidas de complejidad obtenidas del análisis de recurrencia. Por otro lado se introduce un índice de sincronización o dependencia que permite estudiar la evolución de forma bivariada entre dos series temporales denominado ICS (índice complejo de sincronización).

3.1 Índice Complejo de Inestabilidad (ICI)

El ICI es un indicador presentado en Fernández, D. (2014) que se calcula a partir de las medidas de complejidad LAM, DET y RR^2 para medir la inestabilidad presente en la dinámica de una serie de tiempo en ventanas móviles de tamaño n observaciones (por ejemplo n = 100). Este índice se define como:

$$ICI = \lambda_1 \frac{1}{LAM.RR} + \lambda_2 \frac{1}{DET.RR}$$

² Para una definición de estas medidas ver Marwan et al 2007

Donde los ponderadores se definen como:

$$\lambda_1 = \frac{DET}{DET + LAM} \quad \lambda_2 = \frac{LAM}{DET + LAM}$$

Este indicador es comparado con una medida de volatilidad estándar como la varianza de la serie temporal calculada en ventanas móviles del mismo tamaño. La varianza se estima a través de la siguiente fórmula en cada ventana móvil:

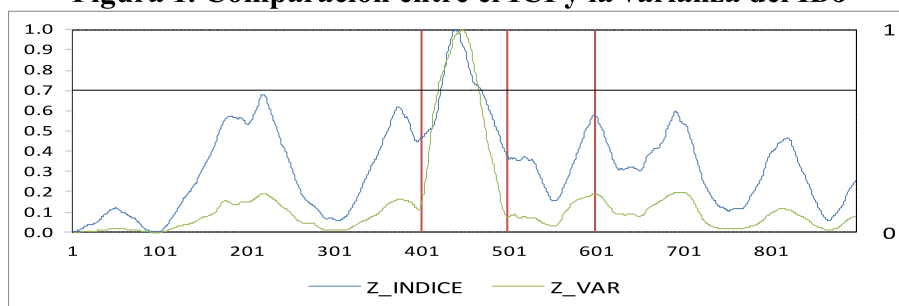
$$VI = S_{indice}^2 = \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} (indice_i - \overline{indice})^2$$

Para su comparación se transforman las series de varianza del índice bursátil y del índice de inestabilidad llevándolas a una escala entre 0 y 1 mediante las siguientes operaciones:

$$ZICI = \frac{ICI - \min(ICI)}{\max(ICI) - \min(ICI)} \quad ZVI = \frac{VIC - \min(VI)}{\max(VI) - \min(VI)}$$

A modo de ejemplo se muestra un resultado extraído de Fernández, D. (2014) aplicado para estudiar la trayectoria del índice de precio Dow Jones. Se tratan de 1000 días centrados en la crisis de 1929.

Figura 1. Comparación entre el ICI y la varianza del IDJ



Como se observa en la Figura 1 cuando el ICI alcanza los máximos relativos y absolutos se observan los períodos de mayor inestabilidad en la serie de tiempo y es posible generar una periodización a partir del mismo. Este indicador será utilizado en la próxima sección para analizar la dinámica de la inflación y desempleo en Uruguay.

3.2 Índice complejo de sincronización o dependencia (ICS)

El ICS es presentado en Fernández, D. (2014) para medir el grado de sincronización o dependencia de sistemas dinámicos para estudiar las trayectorias de índices bursátiles. Dadas las trayectorias de los sistemas x e y se analiza la sincronización entre ambos sistemas mediante la medición de las probabilidades de encontrar estados recurrentes en cada sistema (probabilidad marginal) y la probabilidad conjunta de recurrencia.

Probabilidad marginal de recurrencia. Se obtiene del análisis de cuantificación de recurrencias a partir de la medida de complejidad RR que mide el porcentaje de puntos

recurrentes realizado a cada sistema de forma separada. Siguiendo a Romano et al (2005) las probabilidades marginales de estados recurrentes son: $p(x) = RR^x$ y $p(y) = RR^y$.

Probabilidad de recurrencia conjunta. Se obtiene del análisis de cuantificación conjunto de recurrencia en su versión bivariada denominado joint recurrence quantification analysis a partir de la medida de complejidad RR. Siguiendo a Romano et al (2005) la probabilidad conjunta de estados recurrentes es: $p(xy) = RR^{xy}$.

Sincronización o dependencia. Los sistemas dinámicos no estarán sincronizados o serán independientes si se cumple: $p(xy) = p(x)p(y)$. En caso de sincronización general entre sistemas x e y se espera que $p(x) \approx p(y)$.

Índice complejo de sincronización (ICS). A partir de los conceptos anteriores se define un indicador que permite medir la sincronización entre dos sistemas dinámicos que denominaremos β de la siguiente forma:
$$\beta = 1 - \frac{p(x)p(y)}{p(xy)}$$

Interpretación:

- Si $\beta = 0$ los sistemas dinámicos x e y no están sincronizados (independientes)
- Cuanto mayor sea β , los sistemas x e y estarán más sincronizados. Asumiendo que las probabilidades marginales sean diferentes de 0, es fácil deducir que el rango de valores de β está entre $0 \leq \beta < 1$.

En resumen cuanto más cercano a 1 más sincronizados se encuentran los sistemas y cuanto más cercano a 0 menos sincronizados están.

Se propone a continuación un rango objetivo de valores a los efectos de poder comparar los diferentes mercados en función del grado de sincronización.

$0 \leq \beta < 0.5$ \Rightarrow baja sincronización

$0.5 \leq \beta < 0.8$ \Rightarrow moderada sincronización

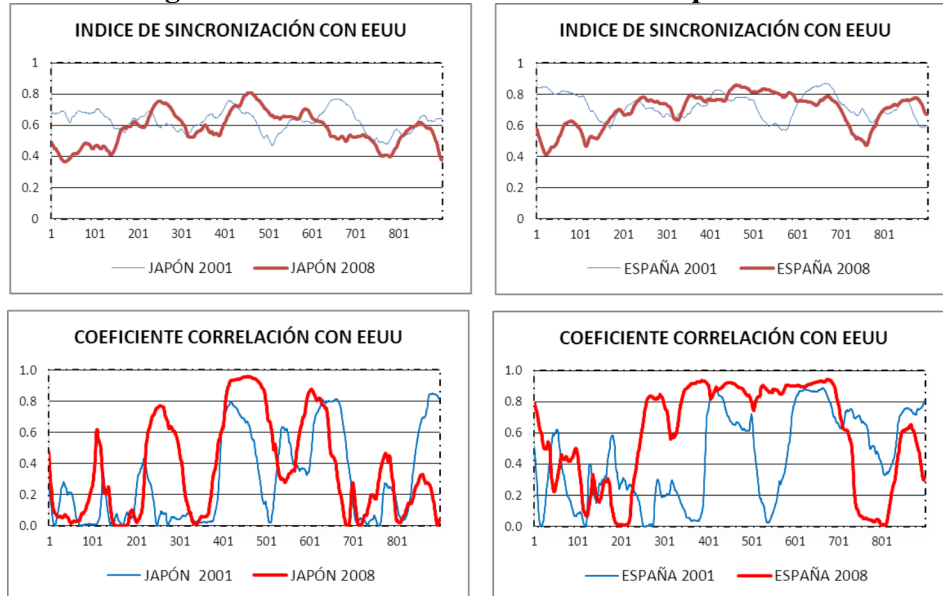
$0.8 \leq \beta < 1$ \Rightarrow alta sincronización

A modo de ejemplo se presenta un resultado extraído de Fernández, D. (2014) para estudiar la dependencia entre las trayectorias de los índices de precios bursátiles de EEUU con Japón y España para las crisis del 2001 y 2008. Los resultados se comparan con el coeficiente de correlación de Pearson elevado al cuadrado.

Como se observa a en la Figura 2, el coeficiente de Pearson al tomar en cuenta relaciones lineales en la evolución conjunta de las series de índices bursátiles no es capaz de captar de forma adecuada la evolución conjunta. Por ejemplo valores de correlación de casi cero que se observan por varios periodos mediante Pearson estarían indicando que mercados como el de EEUU y Japón no estarían relacionados. Se observa que el ICS representa de forma más

adecuada la sincronización entre las trayectorias de los índices bursátiles al tomar en cuenta la no linealidad observada en las trayectorias.

Figura 2. Análisis de Sincronización o dependencia



El ICS será utilizado en esta investigación en la próxima sección para analizar el grado de sincronización o dependencia entre la inflación y el desempleo en Uruguay.

4. APLICACIÓN EMPÍRICA

4.1 Datos a analizar

Se analiza la trayectoria de la inflación medida a través de la variación del IPC (Figura 3) y la tasa de desempleo (Figura 4) de frecuencia mensual entre el periodo enero 1991 a febrero 2014 (278 observaciones) para la economía de Uruguay.

Figura 3. Evolución mensual de la inflación

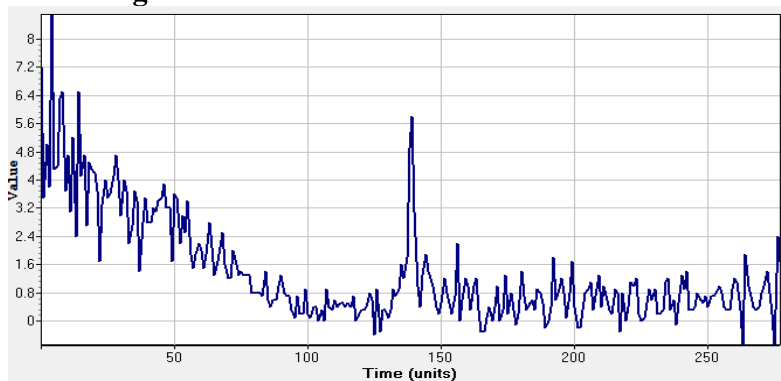
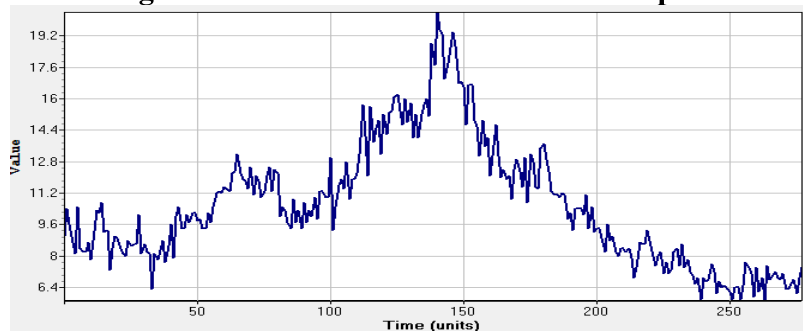


Figura 4. Evolución mensual tasa desempleo



A los efectos del análisis que sigue más adelante en este trabajo es conveniente ver las representaciones de las series de inflación y tasa de desempleo en los gráficos de recurrencia (GR). Para la elaboración de los gráficos de recurrencia respectivos es necesario definir los parámetros de inmersión de retardo y dimensión. En el caso del retardo se utiliza la función mutua de información y para la dimensión se aplica el método de falsos vecinos cercanos. En la Tabla 1 se resumen los valores para cada serie

Tabla 1. Determinación de parámetros de inmersión

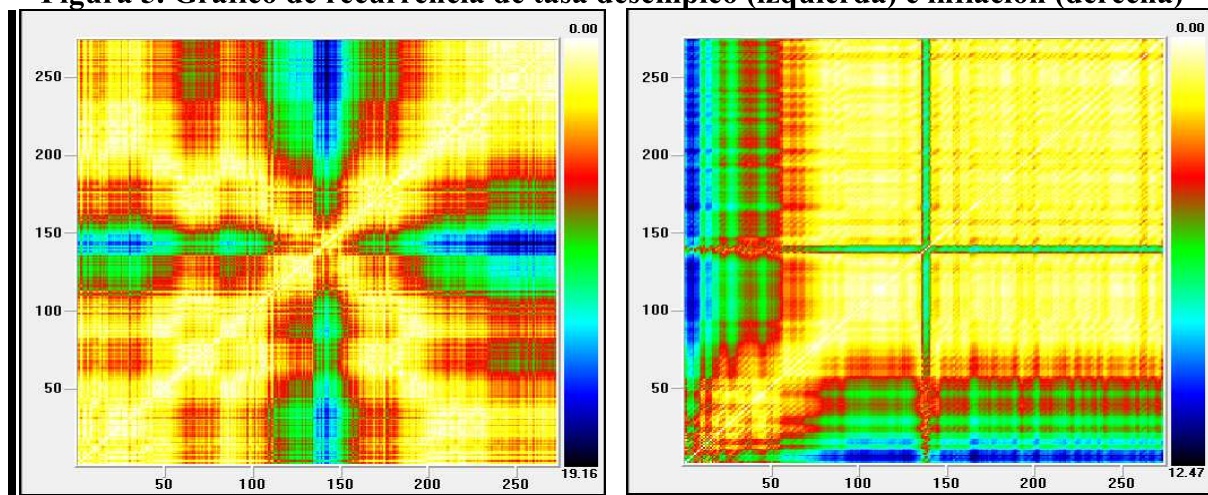
Parámetro de Inmersión	Inflación	Tasa Desempleo
Dimensión	10	2
Retardo	2	4

Los valores de la Tabla 1 por ejemplo para el caso de la inflación de dimensión = 10 y retardo = 2 son utilizados para la reconstrucción del espacio dinámico respectivo. Dimensión 10 implica que existe la influencia de al menos 10 variables que interactúan con la dinámica de la tasa de inflación de la economía uruguaya. Lo interesante es que el análisis aplicado mediante sistemas dinámicos no requiere conocer esas variables sino que la información está contenida en la evolución de la única serie temporal que se observa (en este caso la tasa inflación). Mediante el método de los retardos desarrollado por Takens (1981) se reconstruye el sistema dinámico a partir de la información contenida en una única serie temporal (la tasa de inflación por ejemplo).

Esto implica que el análisis no es de equilibrio parcial. Se podría pensar que es un análisis de equilibrio general sin embargo el concepto de dinámica caótica o sistemas dinámicos determinista asume la existencia de un equilibrio como un posible estado entre infinitos posibles. Por lo tanto se considera adecuado decir que el análisis a aplicar en este trabajo es de **desequilibrio general** en lugar de equilibrio general.

El otro requisito necesario para obtener el GR es definir una distancia o norma que en el caso de este trabajo es la euclídea. En las Figura 5 se presentan los GR para la tasa de desempleo e inflación respectivamente en base a los parámetros definidos.

Figura 5. Gráfico de recurrencia de tasa desempleo (izquierda) e inflación (derecha)



4.2 Tratamiento estadístico: Reducción del ruido

Dado que durante el período analizado la economía uruguaya ha sufrido varios tipos de shocks como la devaluación de Brasil de 1999, la crisis argentina de 2001, la crisis del 2002 en Uruguay, la fiebre aftosa, varias sequías etc., se consideró necesario hacer un tratamiento estadístico previo. Por eso antes de aplicar el análisis de recurrencia se procede a filtrar cada serie por medio del algoritmo desarrollado en Fernández D. (2013) que consiste en reducir el componente de ruido estocástico o caótico de cada serie.

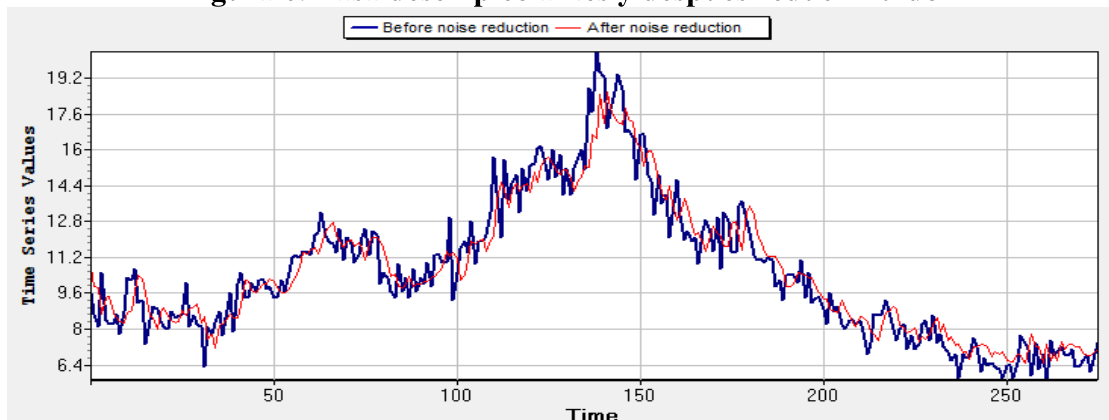
El algoritmo de reducción de ruido que se plantea pretende obtener una nueva serie que recupere en el mayor grado posible las propiedades, geométricas, estadísticas y/o dinámicas de la serie temporal original. Se basa en un análisis local de los datos representados en una serie temporal vectorial. Los pasos para lograr la reducción de ruido son:

- i) La primera etapa consiste en la reconstrucción del sistema dinámico a partir de la información proveniente de una serie temporal por medio del teorema de Takens de forma de obtener varios vectores con la información rezagada de la serie original.
- ii) Se construye una matriz formada por las columnas de los vectores calculados en el paso anterior.

- iii) Para cada punto de espacio vectorial se define un entorno cerrado donde se calcula el comportamiento del sistema en ese entorno.
- iv) Se realiza la aproximación lineal en ese entorno y se calcula para cada punto un nuevo valor que formara parte de una nueva serie sin ruido. En la aplicación de este punto se utiliza una red neuronal en donde previamente es necesaria una etapa de entrenamiento de la arquitectura neural. En concreto es necesario obtener varios patrones de determinado tipo de ruido en dependencia del que se desee cancelar. Siguiendo las recomendaciones de Hernández, F. y Falcón, W. (1999), la arquitectura neural elegida es un perceptrón multicapa FIR que constituye una extensión del diseño del perceptrón multicapa. Se trata de una estructura básica implicada en el reconocimiento de patrones, para que asuma una forma variante en el tiempo y por tanto, sea capaz de tratar con señales variantes en el tiempo.
- v) El análisis detallado en el punto iv se realiza en forma iterativa tratando de ir reduciendo el ruido presente en la serie ruidosa original. De forma de analizar cuando se alcanza el mínimo adecuado en la reducción se utilizará la metodología propuesta en Furman, Simonotto, Beaver, Spano y Ditto (2006) mediante el análisis de recurrencia utilizado en sistemas dinámicos deterministas no lineales.

La razón de aplicar este algoritmo consiste en contar con una serie que esté más pura de shocks que las series analizadas³.

Figura 6. Tasa desempleo antes y después reducir ruido

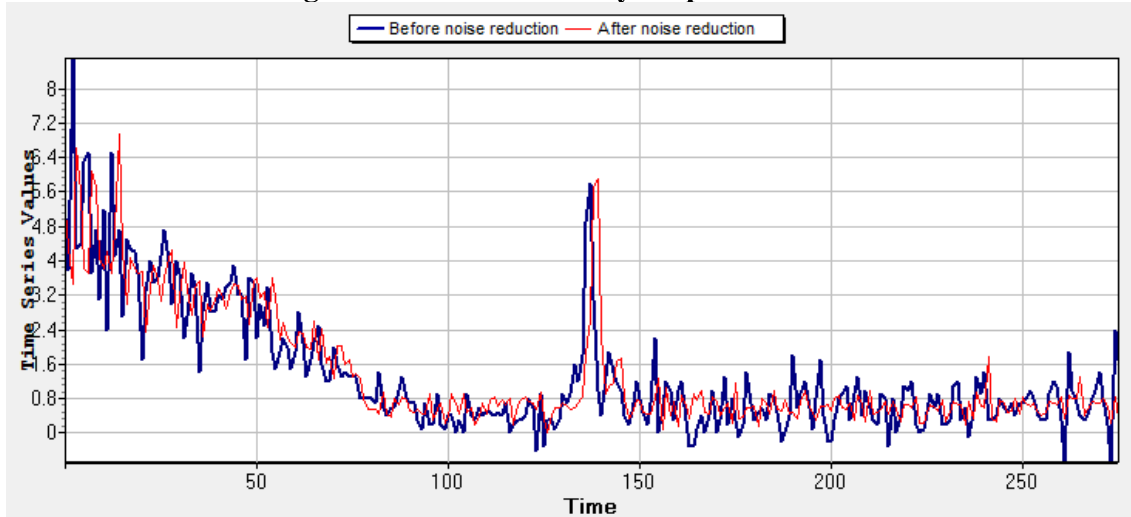


Como se observa en la Figura 6 y 7 a partir de la aplicación del algoritmo se reduce casi un 78% del ruido de la serie de tasa de desempleo y un 65% en el caso de la inflación⁴.

³ Como se verá la reducción del ruido no es total y no fue posible eliminar todos los shocks en esta etapa. Esto como se verá más adelante no es ningún problema dada las características de las técnicas desarrolladas.

⁴ Los porcentajes de reducción del ruido surgen de la aplicación del algoritmo comentado antes.

Figura 7. Inflación antes y después reducir ruido



A pesar de haber obtenido una muy buena performance en la reducción del ruido para el caso de la tasa de inflación vemos que no ha sido posible aislar el efecto de la crisis del 2002. Esto como veremos no va a ser ningún problema dado el tipo de análisis a aplicar.

La performance del algoritmo de reducción del ruido se visualiza de mejor manera mediante los gráficos de recurrencia. Para ello en la Figura 8 y 9 se muestran los GR de la serie original (derecha) y de la serie filtrada (izquierda) de inflación y tasa desempleo respectivamente.

Figura 8. Serie de inflación con ruido (derecha) y sin ruido (izquierda)

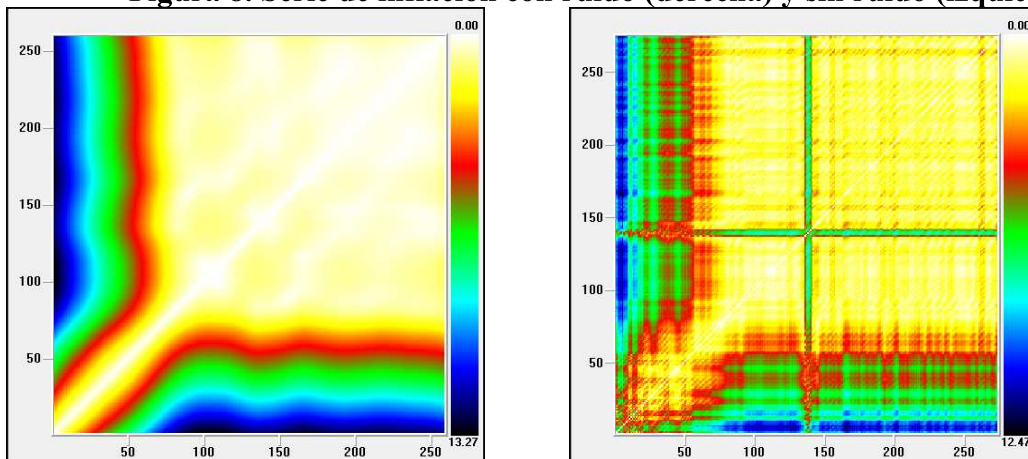
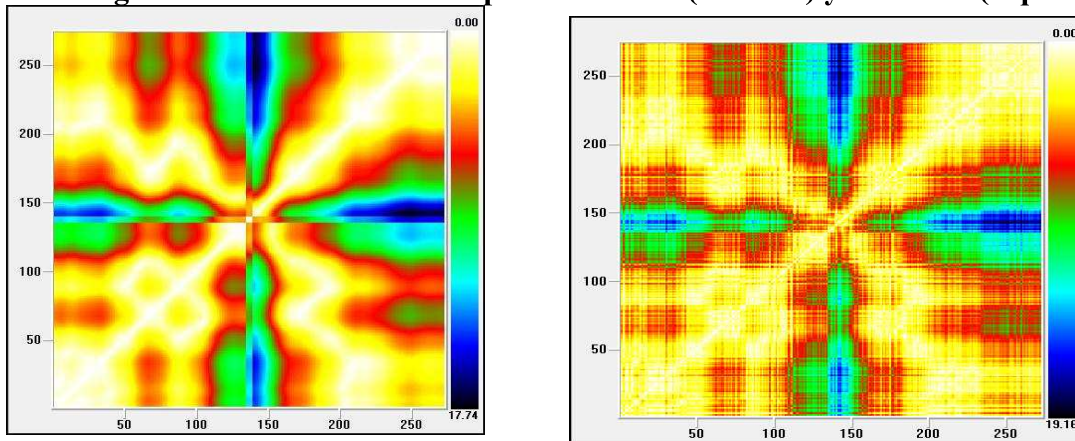


Figura 9. Serie de tasa desempleo con ruido (derecha) y sin ruido (izquierda)

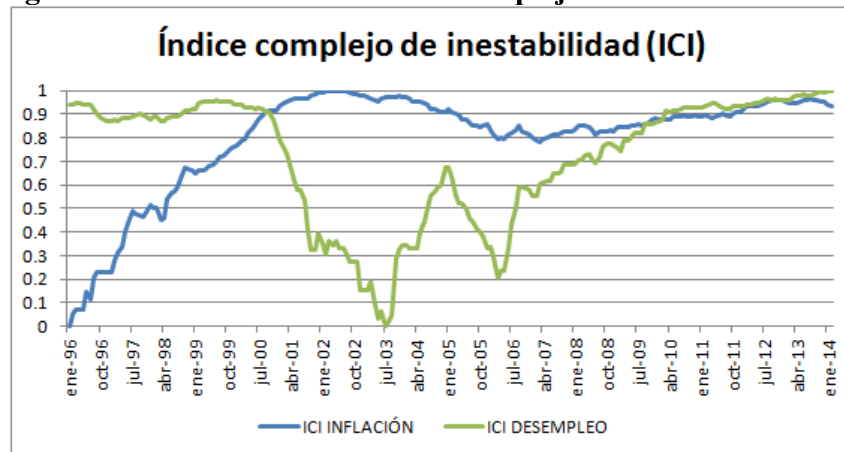


A partir de los gráficos 8 y 9 se observa claramente el concepto de ruido. En el equivalente gráfico la reducción del ruido implica hacer más nítida la imagen.

4.3 Aplicación del índice complejo de inestabilidad (ICI)

En esta sección se calcula el ICI para las series sin ruido de inflación y tasa desempleo. El ICI se calcula para ventanas móviles de 60 meses a partir de la combinación de medidas de complejidad basadas en la tasa de recurrencia.

Figura 10. Cálculo del Indicador Complejo de Inestabilidad ICI



Cada valor del ICI es entonces el resumen de la evolución de 5 años de la tasa de inflación y tasa desempleo. Por lo tanto el primer valor del indicador corresponde a enero de 1996 como se observa en la Figura 10.

El ICI fue desarrollado para mostrar patrones de inestabilidad no lineales a partir de medidas de recurrencia en cada uno de los sistemas dinámicos representados por cada serie. La forma de cálculo del ICI aplicado a las características de las series temporales analizadas en este estudio implica que un aumento de la volatilidad de cada serie se refleja en una reducción del ICI respectivo.

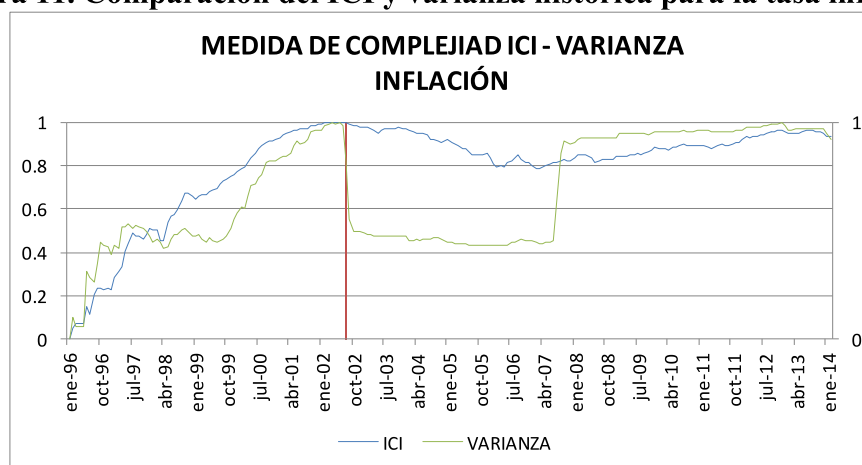
Es interesante observar una asimetría negativa entre enero de 1996 y julio 2000 donde se observa una reducción en la volatilidad de la inflación y una tendencia leve creciente en la volatilidad de la tasa de desempleo. A partir de julio de 2000 se observa un gran aumento en la volatilidad de la tasa de desempleo hasta el mes de julio de 2003. En este período se observa también un aumento de la volatilidad de la tasa de inflación. Luego observamos que entre julio 2003 hasta enero 2005 las volatilidades vuelven a estar cruzadas con una reducción para el caso de la tasa desempleo y un aumento de la volatilidad de la inflación. Finalmente se observa que a partir de julio de 2006 comienza una tendencia de reducción simultánea de la volatilidad de ambas series.

Como conclusión preliminar observamos como en términos de volatilidad medida a partir del ICI una clara sincronización entre la tasa de inflación y desempleo. También se observa que dicha sincronización cambia de signo en varios periodos.

Es conveniente plantear y justificar la utilización del ICI comparando su evolución junto con la varianza de cada serie. A manera de ejemplo se muestra la comparación del ICI de la tasa inflación (Figura 11) y desempleo (Figura 12) con una medida estándar de volatilidad como la varianza histórica calculada para ventanas móviles de igual tamaño.

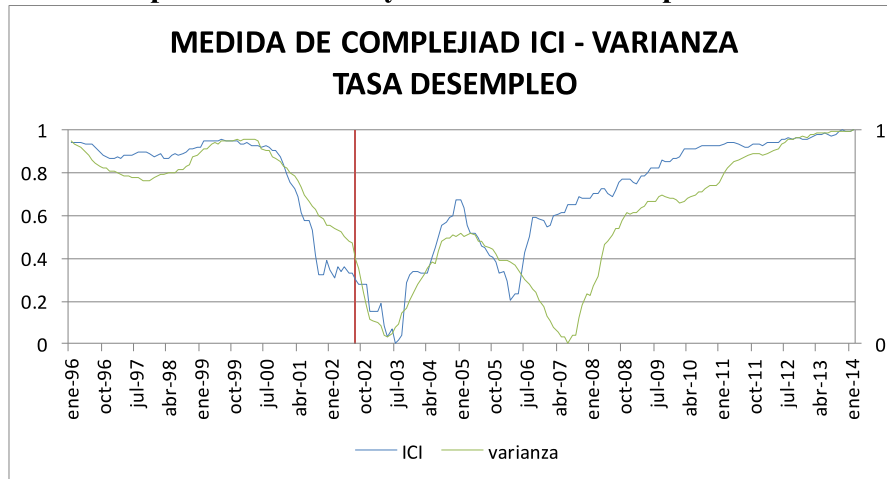
Se observa en la Figura 11 como hasta la línea roja vertical la evolución de ambos indicadores es muy similar. La línea roja vertical está ubicada en agosto de 2002 momento de un cambio estructural muy importante en la economía de Uruguay. Se muestra como la varianza se ve afectada a partir de ese valor extremo. Sin embargo el ICI no se ve alterado ante la ocurrencia de este cambio estructural.

Figura 11. Comparación del ICI y varianza histórica para la tasa inflación



Esto es totalmente lógico dado como se comentara el ICI se calcula a partir de tasa de recurrencia y la recurrencia en el caso de un evento extremo como el 2002 es 0 en período considerado y por tanto este indicador resulta adecuado para estudiar la evolución de series temporales sujetas a cambios estructurales importantes.

Figura 12. Comparación del ICI y varianza histórica para la tasa desempleo



Como se observa en la Figura 12 la otra característica del ICI es que adelanta los cambios observados en la trayectoria de la medida estándar de volatilidad de la varianza histórica.

Viendo las gráficas surge una pregunta importante que refiere a porqué calcular el ICI si la varianza parece mostrar patrones bastante similares. Esto es muy importante entenderlo dado que la varianza es muy fácil de calcular y el ICI, si bien no es difícil de entender, es bastante más complicado su cálculo.

La pertinencia del cálculo del ICI proviene en primer lugar de las características que se mencionaron a partir de la Figura 11 y 12. En resumen el ICI presenta las siguientes características frente a la varianza para medir la volatilidad de una serie temporal:

1. No se ve afectado por valores extremos
2. Anticipan los cambios en la volatilidad

En segundo lugar el cálculo del ICI es luego utilizado para la elaboración de un coeficiente de sincronización en la próxima sección siguiendo la metodología planteada en Fernández, D. (2014).

4.4 Aplicación del índice complejo de sincronización

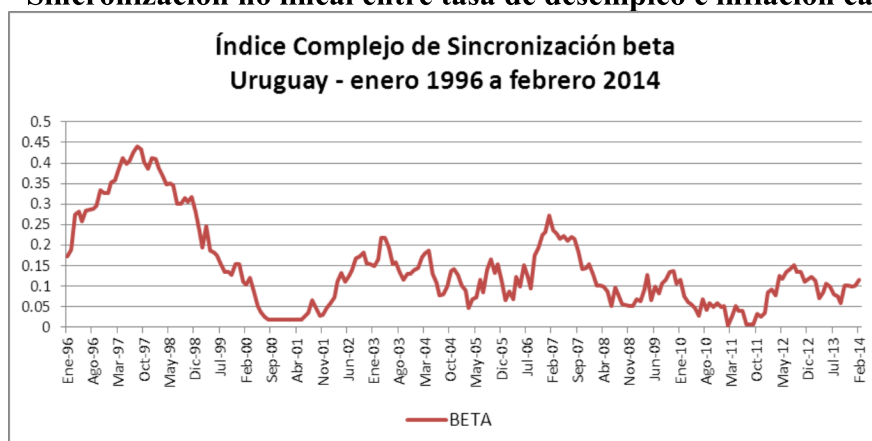
En esta sección se calcula el Índice Complejo de Sincronización (ICS) para estudiar la relación de correlación o dependencia entre las trayectorias de la tasa de inflación y desempleo en Uruguay entre el periodo enero 1991 y febrero 2014. Los resultados del ICS se comparan con el coeficiente de correlación lineal de Pearson. Luego también se aplica la metodología para analizar la sincronización entre inflación y tasa desempleo en EEUU entre el período enero 1948 y diciembre 1957⁵.

Como se explica en el punto 3.2, el ICS se obtiene a partir del cálculo de probabilidades (marginales) de estados recurrentes en las trayectorias de las variables considerando cada una en un sistema dinámico por separado y luego midiendo la probabilidad conjunta de recurrencia entre ambas trayectorias. Se recuerda que si bien hay varios cambios estructurales en el período considerado la metodología aplicada no se ve afectada por su ocurrencia.

Para poder analizar de forma completa la relación entre las trayectorias entre la tasa de desempleo e inflación se considera importante estudiar la fuerza de la relación y la dirección que adoptan las trayectorias en los espacios de fases que define cada sistema dinámico.

Medición de fuerza de la correlación no lineal. El ICS denominado también coeficiente beta tiene un rango de variación entre 0 y 1 y es útil para medir la fuerza que existe entre la relación funcional de forma no paramétrica entre las series consideradas. En la Figura 13 se muestran los resultados para el caso de Uruguay entre el período enero 1996 a febrero 2014.

Figura 13 – Sincronización no lineal entre tasa de desempleo e inflación caso Uruguay



Cada punto de la trayectoria del ICS de la Figura 13 es el resultado del cálculo de las probabilidades de estados recurrentes marginales y conjuntos para ventanas móviles de 60 meses. Es decir que el primer valor de enero de 1996 resume patrones de dinámica del período de 5 años anteriores comenzando en enero 1991.

⁵ Período en el cual Samuelson y Solow (1960) encuentran resultados similares a los de Phillips (1958) para el caso de la economía de Estados Unidos.

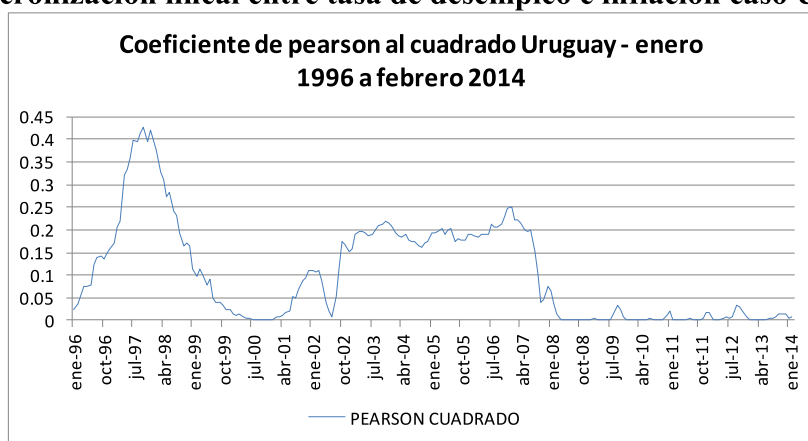
En cuanto a la fuerza de la relación entre tasa de desempleo e inflación se pueden observar 3 periodos en la Figura 13. El primer período abarca entre enero 1996 hasta mediados 2000 – 2001 donde la fuerza de la relación crece hasta octubre de 1997 y luego comienza a disminuir a hasta casi 0. Un segundo período, entre setiembre de 2000 y mediados de 2007 donde la relación crece y se mantiene relativamente estable. El tercer período, a partir de la crisis financiera internacional se observa una reducción de ICS hasta comienzos de 2012 donde se vuelve a mantener relativamente estable.

En primer lugar como conclusión preliminar se observa que el grado de correlación o sincronización entre las series de tasa de desempleo e inflación es bastante alto considerando que se obtiene a partir de periodos de 5 años. Este resultado se considera muy importante dado que es un indicio de una relación funcional importante en periodos que podríamos llamar de mediano a largo plazo. En segundo lugar se observa que desde 1996 el grado de sincronización entre tasa de desempleo e inflación ha disminuido si bien sigue siendo importante dadas las características de las series analizadas.

Medición de fuerza de la correlación lineal. Es fundamental comparar los resultados encontrados en la sección anterior con un indicador de tipo lineal como el coeficiente de correlación de Pearson al cuadrado. El objetivo de esta comparación radica en ver si mediante métodos no lineales se logra describir patrones en la sincronización de las series que no es posible captar mediante un análisis lineal.

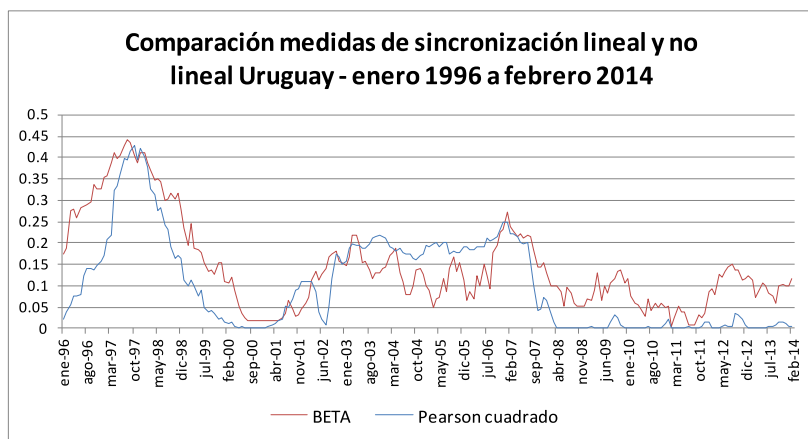
Se procedió entonces a calcular el coeficiente de correlación de tipo lineal elevado al cuadrado para las mismas ventanas de 60 meses como fuera indicado en la Figura 13. Los resultados se muestran en la Figura 14.

Figura 14. Sincronización lineal entre tasa de desempleo e inflación caso Uruguay



Finalmente en la Figura 15 se superponen los indicadores de sincronización lineal y no lineal para poder analizar de forma más clara los resultados.

Figura 15. Comparación de medidas para medir la fuerza sincronización de tipo no lineal y lineal



Como se observa en la Figura 15 la fuerza de la sincronización entre las series de tasa desempleo e inflación muestran una dinámica bastante diferente según qué medida se utilice en los tres períodos definidos en la sección anterior. De la simple observación visual se puede concluir:

- En el primer y tercer periodo el coeficiente no lineal muestra una mayor sincronización que el coeficiente de correlación lineal.
- En el segundo periodo el coeficiente no lineal muestra una menor sincronización que el coeficiente de correlación lineal.
- Dentro del segundo periodo se destaca la crisis del 2002. Se observa que el coeficiente de correlación lineal muestra un cambio total en la fuerza de la sincronización a partir de dicho evento. En el caso del coeficiente de sincronización no lineal no se observa un cambio en la fuerza de la sincronización ante la ocurrencia del evento del 2002.
- La otra característica que se destaca en el tercer período es la baja fuerza de la sincronización que puede captar el coeficiente de lineal a partir del 2008 hasta el final del período.

Medición de la dirección de las trayectorias. Para analizar la dirección del cambio en las trayectorias entre la tasa de desempleo e inflación se propone un algoritmo que modifica o corrige al coeficiente beta de sincronización para poder tener un rango de variación entre -1 y 1 y tener un rango semejante a un coeficiente de correlación tipo Pearson.

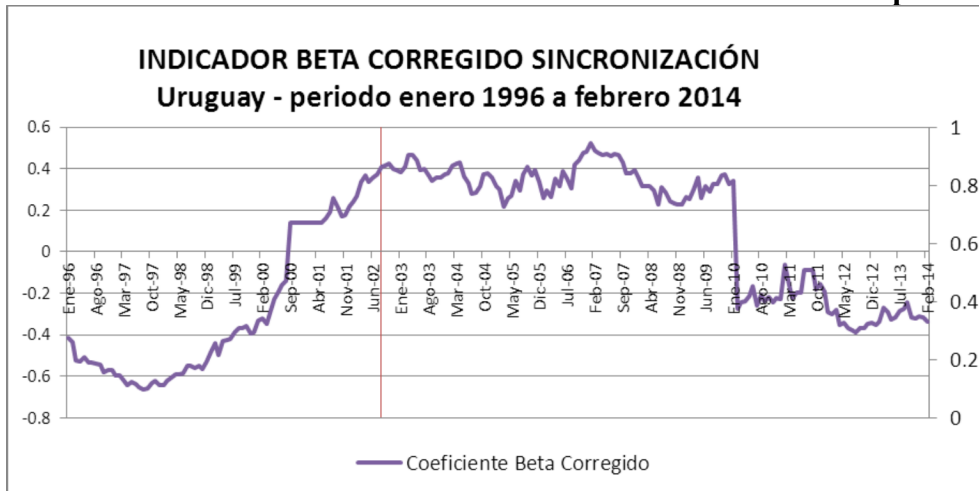
El algoritmo que se propone consta de dos pasos:

1° Calcular la raíz en valor absoluto del índice beta y

2° Tomar en cuenta la distancia euclídea que separa el ICS de cada serie para calcular el signo correspondiente a la raíz calculada en el primer paso.

La interpretación del índice beta corregido es muy simple. El signo muestra la dirección entre las trayectorias de las series. Cuando el valor es negativo implica que ante una caída (aumento) de la tasa de desempleo se ve acompañada de un aumento (caída) en la tasa de inflación y viceversa. O sea que la dirección es contraria en el período móvil de 5 años que se trabaja. De la misma manera, cuando el índice beta corregido muestra un valor positivo nos está informando que la dirección de las trayectorias es directa y por lo tanto ante un aumento (caída) de la tasa de desempleo se observa también un aumento (caída) de la inflación y viceversa.

Figura 16. Medición de la dirección de la sincronización entre tasa desempleo e inflación



En la Figura 16 se puede observar la aplicación de algoritmo sobre el ICS que se denomina beta corregido. Como se observa es posible encontrar 3 períodos que marcan patrones diferentes en la relación de sincronización entre las series de tasa de desempleo e inflación.

Primer período: Enero 1996 – Setiembre 2000

Segundo período: Octubre 2000 – Enero 2010

Tercer período: Febrero 2010 – Febrero 2014

Lo que diferencia estos períodos es el signo de la dirección de la sincronización que se observa. En el caso del primer y tercer período la correlación es negativa mientras que el segundo período es positiva.

Medición de la dirección de la sincronización usando coeficiente de correlación lineal.

Se procede a calcular el coeficiente de correlación lineal de Pearson para las mismas ventanas de 60 meses (ver Figura 17) y se compara su evolución con los resultados obtenidos para el indicador beta corregido para medir la dirección de la sincronización (ver Figura 18).

Figura 17. Índice de correlación lineal de Pearson

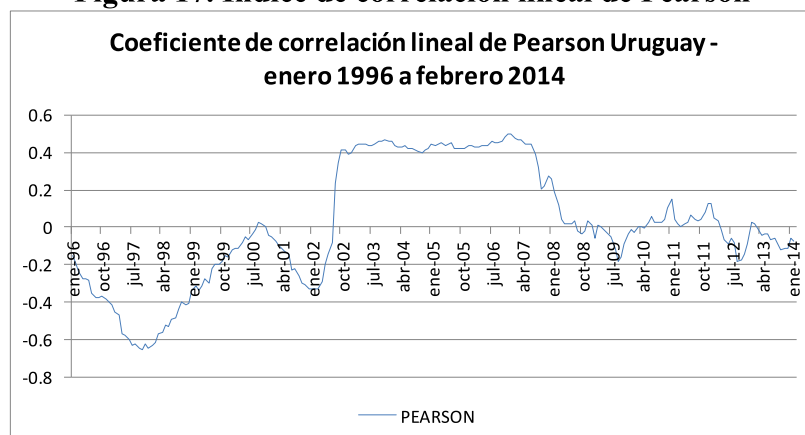
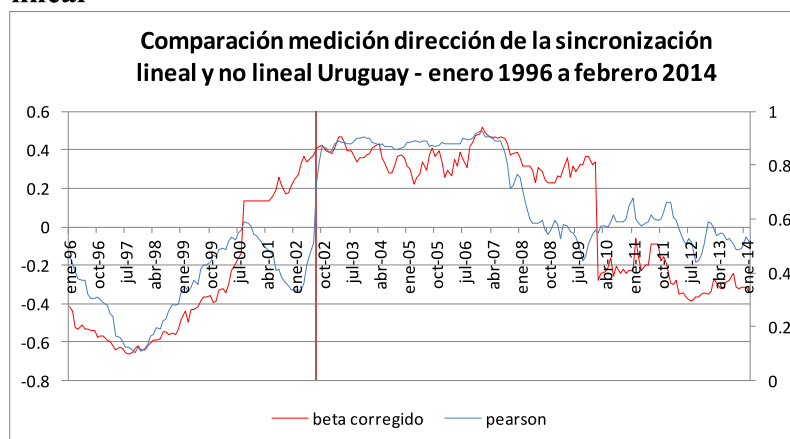


Figura 18. Comparación de medidas para medir la dirección de la sincronización de tipo no lineal y lineal



A partir de la Figura 18 se observan comportamientos diferentes en los tres periodos en relación a la dirección de la sincronización entre las series temporales. Las principales diferencias que se destacan son:

- A partir de junio de 2000 la sincronización medida en base al indicador no lineal pasa a ser positiva mientras que medida en base al indicador lineal dicho signo positivo se alcanza recién a partir de la crisis del 2002.
- Por lo tanto se observa que el indicador no lineal no se ve afectado por la ocurrencia de un cambio estructural como la crisis del 2002.
- Medido a partir del indicador no lineal la dirección de la sincronización mantiene el signo positivo hasta abril del 2010 y luego sigue con el signo negativo hasta el 2014. Sin embargo se observa que medido a partir del indicador lineal el signo fluctúa entre positivo y negativo dependiendo el momento de tiempo.

Si bien el objetivo de este estudio no es encontrar una curva de Phillips de forma paramétrica los resultados encontrados en el segundo período plantean una interrogante o dilema que es necesario investigar. Sabiendo que la relación funcional que marca la curva de Phillips es un fenómeno cíclico y dado los conceptos de curva de Phillips keynesiana de pendiente negativa y austríaca de pendiente positiva los resultados preliminares encontrados plantean la interrogante sobre si la evidencia encontrada es consistente con los conceptos anteriores.

En este estudio no se va a plantear que por ejemplo en el segundo período la economía uruguaya se comporta de acuerdo a los supuestos de una Curva de Phillips de pendiente positiva y que en el primer y tercer periodo una Curva de Phillips de pendiente negativa debido a que sinceramente no se conoce la respuesta. Esta interrogante o dilema encontrado no es para nada un problema sino que es un resultado interesante que deja abierta la puerta para futuras investigaciones.

Se considera importante realizar el estudio para más países y para varios períodos de forma de poder encontrar hechos estilizados sobre la trayectoria de la tasa de desempleo e inflación mediante la metodología propuesta.

Dado los comentarios anteriores se consideró interesante aplicar esta metodología para un país y ciertos períodos donde no se discute la existencia de una curva de Phillips de pendiente

negativa y otra de pendiente positiva. Para ello se tomaron datos de la economía de Estados Unidos para el período enero 1948 a diciembre 1957 por un lado y período de surgimiento del fenómeno de “estanflación” previo a 1976 entendido como un fenómeno de alta inflación y alto desempleo de forma simultánea.

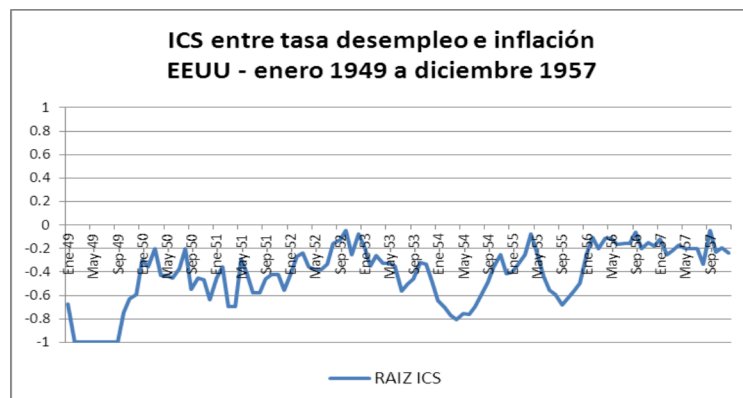
Periodo 1948 – 1957 para Estados Unidos: ¿Curva de Phillips negativa?

Se analiza la relación entre tasa de desempleo e inflación para la economía de Estados Unidos entre el mes de enero de 1948 y diciembre de 1957. Este período fue inicialmente estudiado por Samuelson y Solow (1960) y llegan a conclusiones similares al trabajo de Phillips (1958).

Se busca por lo tanto aplicar la misma metodología descrita para el caso de Uruguay a la economía de Estados Unidos en este período de la historia. En este período Samuelson y Solow encuentran evidencia de una relación negativa entre las variables analizadas.

La aplicación del análisis de sincronización basado en el análisis de recurrencia arrojó los resultados que se ilustran en la Figura 19. Como se observa el valor del coeficiente de sincronización beta corregido asume un valor negativo en todo el período de análisis.

Figura 19. Análisis de sincronización entre tasa desempleo e inflación para Estados Unidos



Como se observa en la Figura 19 el ICS corregido muestra en todo el período de análisis un rango de valores negativos lo que está indicando la relación inversa entre las variables aunque con niveles variables de fuerza en dicha relación.

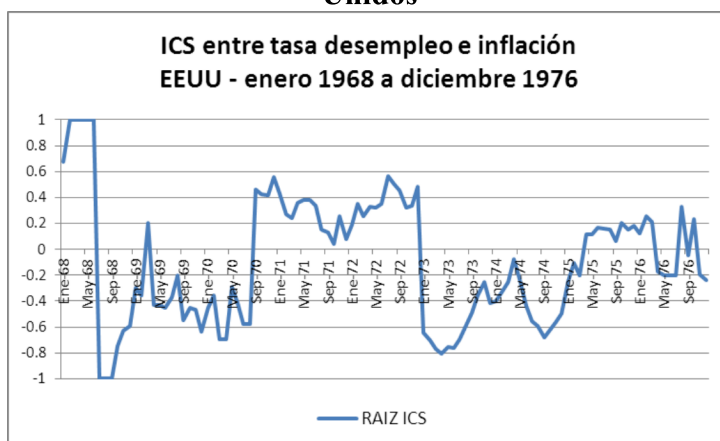
Este resultado encontrado no puede ser tomado a la ligera y se quiere reflexionar sobre el mismo. Por un lado se encuentra a través de esta metodología una relación similar a los supuestos de una relación funcional inversa como plantea el concepto de curva de Phillips keynesiana. Por otro lado no se quiere afirmar en este trabajo que la metodología propuesta sea adecuada para determinar la pendiente de las curvas de Phillips en diferentes momentos del tiempo para una economía dada porque nuevamente y siendo totalmente sinceros se desconoce la respuesta.

Periodo 1968 – 1976 para Estados Unidos: ¿Curva de Phillips positiva?⁶

Este período cubre el denominado fenómeno de estanflación y es un período donde no se cumple la relación de la curva de Phillips keynesiana de pendiente negativa encontrada por Phillips (1958) y Samuelson y Solow (1960) por ejemplo. Autores como Friedman (1976) plantean que estos años valores más altos de inflación han sido acompañados de mayor desempleo y no menor, especialmente al tomar períodos de varios años. Este dilema planteado por Friedman plantea un escenario muy diferente a la curva de Phillips de pendiente negativa o a la de pendiente vertical.

La aplicación de la metodología de sincronización propuesta en base a probabilidades de recurrencia para el período llamado de estanflación arrojó los resultados que se muestran en la Figura 20.

Figura 20. Análisis de sincronización entre tasa desempleo e inflación para Estados Unidos



A diferencia del patrón observado en la Figura 19 vemos que ahora, en la Figura 20, encontramos varios períodos con signo diferente en la dirección de la sincronización entre la tasa de desempleo e inflación. Vemos como el ICS corregido adopta valores positivos entre el período setiembre 1970 a diciembre 1973 y entre abril 1975 hasta mayo 1976. En estos dos períodos vemos que los aumentos de inflación se encuentran sincronizados con aumentos en la tasa de desempleo como observara Friedman (1976).

Nuevamente se quiere aclarar que los resultados encontrados, si bien son consistentes con los resultados encontrados por varias investigaciones para el caso de Estados Unidos en este período, no buscan afirmar que la metodología aplicada en este trabajo sea la adecuada para analizar las pendientes de las curvas de Phillips.

Siendo objetivos lo único que se puede decir es que se encontró evidencia estadística de la relación encontrada por varios estudios importantes sobre el tema mediante una metodología alternativa y que se considera fundamental la realización de varios estudios que corroboren o refuten los resultados encontrados para otros períodos y otros países.

⁶ El periodo se denomina estanflación pero técnicamente arranca antes para poder comparar cambios en el signo de la sincronización.

Si bien este trabajo no es de teoría económica en el sentido que no se buscó refutar ninguna teoría que busque fundamentar la relación empírica de la curva de Phillips se considera pertinente la profundización de mayores investigaciones básicamente por tres elementos teóricos.

1. La discusión de la neutralidad o no del dinero en el corto y largo plazo. La pertinencia en este punto radica en que hay bastante consenso entre keynesianos, monetaristas y austríacos sobre la no neutralidad de la política monetaria en el corto plazo. Sin embargo aparecen varias diferencias cuando nos concentramos en los efectos de mediano y largo plazo como lo analizado en este trabajo.
2. La discusión sobre la formación de expectativas. Detrás de la discusión de los resultados está implícita el tema de la formación de expectativa bien sean adaptativas o racionales versus las subjetivas planteadas por la escuela austríaca.
3. La discusión sobre ciclos económicos. Por último es pertinente realizar más estudios debido a la discusión sobre la relación que produce o no la política monetaria e inflacionaria de un hacedor de política sobre los ciclos económicos

5. CONCLUSIONES

El objetivo de éste trabajo es analizar la relación entre las trayectorias de la tasa de desempleo e inflación mediante la aplicación de la metodología desarrollada en Fernández, D. (2014). Entre los resultado encontrados en la aplicación empírica se mostró la adecuación del Índice Complejo de Inestabilidad (ICI) para describir la volatilidad de las series temporales analizadas a través del análisis de recurrencia de estados en cada sistema dinámico. Otro resultado importante fue mostrar como la metodología de construcción del ICI no se ve afectado por cambios estructurales importantes como por ejemplo la ocurrencia de la crisis del 2002 en Uruguay.

A través de ICI se encontró indicios de sincronización en las volatilidades de la tasa de desempleo e inflación de signo variante entre el período enero 1996 a febrero 2014 para la economía uruguaya. Mediante el Índice Complejo de Sincronización (ICS) se mostró que la fuerza de la sincronización entre las trayectorias es fuerte con cambios importantes que definen tres períodos como se discutió. La fuerza de la relación entre tasa de desempleo e inflación ha venido disminuyendo desde enero 1996 pero se considera que es un indicio de una relación funcional importante en períodos que podríamos llamar de mediano o largo plazo (5 años).

Para analizar la dirección del cambio en la sincronización o correlación de las trayectorias se aplicó un algoritmo que modifica el ICS para que tenga un rango de variación de -1 y 1 y pueda interpretarse de forma similar a un coeficiente de correlación tipo Pearson. Se encontró evidencia de 3 períodos donde el ICS corregido cambia de signo. Resaltando el denominado segundo periodo que va de octubre 2000 a enero 2010 donde la sincronización entre la tasa de desempleo e inflación toman un signo positivo o sea que se estarían moviendo juntas.

Si bien el objetivo del estudio no es encontrar una curva de Phillips de forma paramétrica los resultados encontrados en el segundo período plantean un dilema que es necesario investigar. En este sentido se plantea la necesidad de realizar estudios con datos de más países y mayores

períodos de forma de encontrar hechos estilizados sobre el tipo de sincronización entre tasa de desempleo e inflación mediante la metodología propuesta.

En línea con la conclusión anterior se aplicó la metodología con dato de la economía de Estados Unidos y se encontraron resultados consistentes con los hallazgos fundamentales de Samuelson y Solow (1960) con una relación funcional negativa de la curva de Phillips y la observación de Friedman (1976) en el período de “estanflación” con evidencia de una relación positiva entre ambas variables.

No pudiendo afirmar que la metodología aplicada sea la adecuada para analizar la pendiente de una curva de Phillips ya sea de pendiente negativa, vertical o positiva, se encontró evidencia estadística de la relación encontrada por varios estudios importantes sobre el tema. Si bien este trabajo no buscó refutar ninguna teoría concerniente al signo de la relación funcional entre tasa de desempleo e inflación se planteó la pertinencia de mayores estudios por tres temas teóricos que están interrelacionados: la discusión sobre ciclos económicos, la discusión sobre la formación de expectativas y la discusión de la neutralidad o no del dinero en el corto y largo plazo.

Como futuras líneas de investigación se plantea la realización de un test de causalidad no lineal mediante métodos de dinámica caótica y la elaboración de intervalos de confianza para los indicadores propuestos de forma de poder estudiar la significación de los valores obtenidos en cada ventana móvil.

BIBLIOGRAFÍA

- J.-P. Eckmann, S.O. Kamphorst, D. Ruelle, Recurrence plots of dynamical systems, *Europhys. Lett.* 5 (1987) 973–977.†
- Fernández, D.(2013) REDUCCIÓN DEL RUIDO Y PREDICCIÓN DE SERIES TEMPORALES DE ALTA FRECUENCIA MEDIANTE SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES Y TÉCNICAS NEURALES. Trabajo presentado en las XXVIII Jornadas Anuales de Economía del BCU
- Fernández, D. (2014) “Estudio de las trayectorias de precios en mercados financieros usando métodos de sistemas dinámicos no lineales y cambio de regímenes markovianos”. Tesis de Maestría en Economía – FCEA UDELAR pendiente de defensa antes de octubre 2014.
- Friedman, M. (1976) *Nobel Memorial Lecture: Inflation and Unemployment*, Nobel Foundation, December 13, 1976
- MARWAN, N., Carmen Romano, M., Thiel, M., & Kurths, J. (2007). Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, 438(5), 237-329.
- PHILLIPS, A.W.H. (1958): «The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom, 1861-1957», *Economica*, Vol. 25.
- ROMANO, M. C., THIEL, M., KURTHS, J., KISS, I. Z., & HUDSON, J. L. (2005). Detection of synchronization for non-phase-coherent and non-stationary data. *EPL (Europhysics Letters)*, 71(3), 466.
- Samuelson, P. A., & Solow, R. M. (1960). Analytical aspects of anti-inflation policy. *The American Economic Review*, 177-194.

- F. Takens, Detecting strange attractors in turbulence, in: D. Rand, L.- S.Young (Eds.), Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, Springer, Berlin, 1981, pp. 366–381.