

Anales del VII CONGRESO NACIONAL DE ESTUDIANTES DE POSTGRADO EN ECONOMÍA (CNEPE)

*DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR*

*INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS Y SOCIALES DEL SUR (IIESS)
CONICET - UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR*

Bahía Blanca

Mayo de 2015

ISBN: 978-987-1648-39-9



Departamento de Economía



I I E S S

**INTRODUCCIÓN DE OPERADORES DE AGREGACIÓN EN UN
MODELO FUZZY DE DIAGNÓSTICO EMPRESARIAL.**

Scherger, Vigier, Terceño.

INTRODUCCIÓN DE OPERADORES DE AGREGACIÓN EN UN MODELO FUZZY DE DIAGNÓSTICO EMPRESARIAL

SCHERGER, Valeria (Departamento de Economía, UNS)

TERCEÑO, Antonio (Departamento de Gestión de Empresas, Universitat Rovira i Virgili)

VIGIER, Hernán, (Departamento de Economía, UNS- CEDETS, UPSO)

valeria.scherger@uns.edu.ar; antonio.terceno@urv.cat; hvigier@uns.edu.ar

RESUMEN

En este trabajo se propone incorporar un mecanismo de análisis que permita verificar la capacidad de predicción del modelo de diagnóstico fuzzy de Vigier y Terceño (2008). Esta inclusión de operadores de agregación implica un enriquecimiento del modelo porque permite reducir el mapa de causas o enfermedades detectadas en áreas estratégicas de monitoreo continuo, y a su vez pueden ser desagregadas, una vez identificado algún indicador de alerta. Es decir, a través de este mecanismo es posible medir la capacidad de explicación y pronóstico de las enfermedades estimadas por el modelo; además de detectar las áreas claves de monitoreo que alerten sobre eminentes situaciones de insolvencia.

En esta investigación planteamos la incorporación de operadores de agregación de causas del fracaso, y de un índice de bondad de ajuste, mediante soluciones aproximadas, que permite testear la bondad de ajuste de las predicciones del modelo. Además, como ejemplo, se presenta la estimación empírica del modelo y el testeo de la propuesta de mejora a un conjunto de pequeñas y medianas empresas (PyMEs) del sector construcción.

Clasificación JEL: G33 L25, M21

Palabras clave: diagnóstico económico financiero, predicción, síntomas y causas, relaciones borrosas

ABSTRACT

The aim of the following paper is proposed a mechanism of analysis useful to verified the capacity of the Vigier and Terceño (2008) diagnostic fuzzy model to predict diseases. The model is enriched by the inclusion of aggregation operators because this allows to reduce the detected map of causes or diseases in strategic areas of continuous monitoring. And at the same time this causes can be disaggregated once some alert indicator is identified. The capacity of explanation and prediction of estimated diseases are measured through this mechanism; and also are detected the monitoring key areas that warning insolvency situations.

In this approach are introduced aggregation operators of causes of business failure, and a goodness measure using approximate solutions. This index of goodness allows testing the degree of fit of the predictions of the model. Also, as an example, the empirical estimation and the verification of the improvement proposal to a set of small and medium- sized enterprises (SMEs) of the construction sector are presented.

Keywords: economic-financial diagnosis, prediction, symptoms and causes, fuzzy relations

JEL Classification: G33 L25, M21

1. INTRODUCTION

El modelo de Vigier y Terceño (2008) de diagnóstico económico financiero a partir de relaciones binarias borrosas, es un modelo que avanza sobre otros modelos de predicción, tratando de entender el proceso de fracaso empresarial a partir de las relaciones entre causas y síntomas y el rol del analista financiero o experto. Este modelo, además de predecir situaciones de insolvencia, tiene capacidad para diagnosticar problemas y simular (o bien complementar) la tarea del analista¹. Además brinda una visión diferente a los modelos tradicionales (Altman, 1968; Beaver, 1966; Ohlson, 1980; Edminster; 1972; Keasey y Watson, 1987; etc.), incorporando elementos

¹ Se elige este modelo porque realiza un análisis integral de causas y síntomas sobre los modelos pioneros de Gil Aluja (1990) y Gil Lafuente (1996), y las propuestas recientes de Delcea y Scarlat (2009), Maracine y Delcea (2009), Scarlat et al (2010) que tomando como referencia este modelo derivan las causas y los síntomas a partir de la sustracción de la matriz de performance y por lo tanto introducen un mayor grado de subjetividad y sesgo en favor de las opiniones brindadas por los expertos.

de subjetividad e incertidumbre formalizados a través de lógica fuzzy, e introduce mejoras respecto a algunos problemas metodológicos discutidos en la literatura².

Por las características del problema planteado es muy difícil encontrar una solución integral utilizando un método clásico, dada la gran cantidad de variables y parámetros utilizados en el proceso de diagnóstico, y que muchas de ellas se evalúan a partir de variables cualitativas o de opiniones de analistas. Estas consideraciones abren el camino a la aplicación de herramientas y métodos de matemática borrosa. Como este modelo y otros similares (Delcea et al., 2013; Delcea et al., 2012; Behbood and Lu, 2011; Scarlat y Delcea, 2011; Scarlet et al., 2010; Arias-Aranda et al., 2010; Behbood et al., 2010; Delcea and Scarlat, 2009; Mărcine and Delcea, 2009; Thapar et al., 2009; Gil Aluja, 1990; Gil Lafuente, 1996) carecen de un sistema de evaluación de la capacidad de diagnóstico y predicción; ni un mecanismo formal de tratamiento de causas, en este trabajo se propone un método de agrupación de causas a través de operadores de agregación y la formulación de un índice de bondad para evaluar los resultados de la estimación. Estos aportes enriquecen el modelo de Vigier y Terceño (2008) y son aplicables a cualquier modelo de diagnóstico fuzzy.

2. EI MODELO DE DIAGNÓSTICO

El modelo propuesto por Vigier y Terceño (2008), se basa en la estimación de una matriz de conocimiento económico- financiero (R), a partir de la estimación de las matrices de incidencia de síntomas y de causas. La construcción de la matriz de conocimiento económico- financiero (R) se determina a partir de un conjunto de síntomas $S = \{S_i\}$, donde $i = 1, 2, \dots, n$, de causas $C = \{C_j\}$, donde $j = 1, 2, \dots, p$, de períodos $T = \{T_k\}$, donde $k = 1, 2, \dots, t$, y de empresas en las cuales es posible identificar síntomas y causas $E = \{E_h\}$, donde $h = 1, 2, 3, \dots, m$.

$$R = Q^t \alpha P \quad (1)$$

Donde,

R = matriz de conocimiento económico financiero

$Q^t = [q_{hi}]^t = [q_{ih}]$: traspuesta de la matriz de pertenencia de síntomas

P = $[p_{hj}]$: matriz de pertenencia de causas

² Se pueden consultar las revisiones realizadas por Zavgren (1983); Zmijewski (1984); Jones (1987); Mora (1994); Balcaen y Ooghe (2006); Tascón y Castaño (2012), etc. que comentan los principales problemas metodológicos de los modelos tradicionales y las nuevas técnicas aplicadas.

A: operador fuzzy

Es decir,

$$R = Q^t \alpha P = [q_{ih}] \alpha [p_{hj}] = [r_{ij}] \quad (2)$$

Donde,

$$[r_{ij}] = 1 \quad \text{si } q_{ih} \leq p_{hj}$$

$$[r_{ij}] = p_{hj} \quad \text{si } q_{ih} > p_{hj}$$

Cada r_{ij} muestra el nivel de incidencia entre el síntoma S_i (q_{ih}) y la causa C_j (p_{hj}).

El conjunto de síntomas (S) se construye a partir de la selección de ratios, tomando como referencia los trabajos realizados con anterioridad para predecir la solvencia empresarial (Teoría de Ratios, modelos de predicción del fracaso empresarial, etc.). Una vez obtenida la matriz cardinal de síntomas (S), se determina la matriz de pertenencia de cada síntoma (Q) a través de la frecuencia relativa acumulada.

Con respecto a las causas, el modelo propone la construcción de un conjunto de causas medible subjetivamente C_j^s con $j = 1, 2, \dots, s$; y un conjunto de causas medible objetivamente C_j^o con $j = s+1, s+2, \dots, p$. La matriz de pertenencia de causas objetivas se obtiene mediante el mismo mecanismo de construcción que la matriz de pertenencia de síntomas. Mientras que en el caso de las causas subjetivas, se procede a cuantificar la opinión de expertos a través de etiquetas lingüísticas en el intervalo $[0, 1]$ que reflejan la incidencia de cada causa para el funcionamiento de la empresa. La lógica del modelo indica que los valores más altos se corresponden con causas que tienen mayor incidencia (Zimmermann 1987 y 1991). Este nivel de incidencia o pertenencia de cada causa se determina a través de las frecuencias acumuladas de las etiquetas en cada escala y se expresa en la matriz de pertenencia de causas (P).

Para realizar un estudio lo más homogéneo posible, el conjunto de empresas seleccionadas deben ser de una región y sector productivo concreto (E) y que además esté conformado por empresas sanas y enfermas.

Para solucionar posibles problemas de inconsistencia, Vigier y Terceño (2012) proponen la utilización de un método de filtrado a partir de la descomposición y

operación de cada uno de los r_{ij} . La inconsistencia se manifiesta cuando existen niveles de intensidad elevados para muchas empresas y bajos para pocas, por lo tanto el indicador alfa puede seleccionar erróneamente la menor intensidad. La metodología consiste en la eliminación de las empresas que pueden provocar niveles de incidencia inconsistentes³. Además el modelo desarrolla las particularidades en la agregación de matrices y la verificación de tendencias que pueden distorsionar los resultados del modelo. Estas técnicas permiten obtener una matriz agregada con validez temporal y capacidad de pronóstico (\mathfrak{R}).

La matriz \mathfrak{R} se utiliza para efectuar predicciones (Terceño y Vigier, 2011), es decir, detectar posibles enfermedades en las empresas a través de la aplicación del operador max- min entre la matriz de pertenencia de síntomas (Q) y la matriz agregada \mathfrak{R} , $P' = Q \cdot \alpha \mathfrak{R} = [p'_{hj}]$; siendo $p'_{hj} = \max(\min(q_{hi}, r_{ij}))$, donde P' es la matriz estimada de causas (ó enfermedades) que generan síntomas en las empresas. De esta forma, se puede determinar el grado de ocurrencia de las diferentes enfermedades (para empresas similares en sector y tamaño), y a partir del monitoreo de las causas se pueden tomar las medidas para corregir la situación. La estimación empírica y el análisis de enfermedades se puede consultar en Scherger *et al* (2014).

3. LIMITACIONES DEL MODELO

Si bien el modelo de Vigier y Terceño (2008) avanza sobre otros respecto a la posibilidad de diagnosticar y predecir causas del fracaso, al ser un modelo teórico se pueden señalar algunas limitaciones:

- a) Carencia de aplicación. Al ser un modelo teórico, que no define específicamente las causas y síntomas que interviene en el diagnóstico, sumado a que su contrastación requiere de una gran cantidad de información sobre el desempeño de las empresas, hasta el momento no ha sido contrastado empíricamente, más allá de demostrar la consistencia interna del modelo.
- b) Verificación del poder predictivo. El modelo no propone ningún mecanismo que teste su capacidad de diagnóstico y predicción. Es decir, no hay prevista ninguna pauta que evalúe el grado de ajuste de las predicciones a las respuestas proporcionadas por los expertos.

³ De acuerdo a Vigier y Terceño (2008) esta metodología es consistente con los aportes de Sánchez (1982) respecto a las condiciones generales impuestas para la solución de ecuaciones binarias borrosas.

- c) Selección de síntomas. Con respecto a los síntomas el modelo menciona que deben emplearse los ratios económico financieros que surgen de los estados contables de las empresas, sin enunciar cuáles son los ratios que podrían utilizarse.
- d) Determinación de causas. Si bien el modelo menciona la incorporación de variables cuantitativas y cualitativas provenientes del ambiente interno y externo a la empresa; e identifica la diferencia entre las variables que son síntomas (o efectos) y enfermedades (o causas) para determinar las interrelaciones entre causas y síntomas; no llega a definir un listado o vademécum de causas que debe considerar el analista a la hora de realizar el diagnóstico. Sólo menciona, que existen causas endógenas y exógenos, objetivas y subjetivas, que pueden extraerse de los modelos teóricos (Porter, 1991; Argenti, 1976 y 1983; etc.). En este sentido en Terceño et al (2009 y 2014) se propone una metodología de detección de causas integrando la lógica fuzzy con el Balanced Scorecard.

Por lo tanto, no llega a verificar la capacidad del modelo para simular la tarea del experto, y juzgar la razonabilidad económica de las relaciones entre las variables. Esto es posible sólo a partir de la definición más concreta del conjunto de posibles causas y síntomas presentadas en Terceño et al (2012). Las limitaciones expuestas, han motivado proponer una metodología global de análisis de causas a través de operadores de agregación que faciliten la tarea del experto en el diagnóstico de empresas y un mecanismo formal que permita testear y verificar su capacidad de diagnóstico y predicción .

4. AGRUPACIÓN DE CAUSAS

A partir de la estimación de P' , mediante la operación inversa entre Q y \mathfrak{R} ; que muestra las múltiples causas (o enfermedades) que puede sufrir una empresa proponemos incorporar un mecanismo de reducción del mapa de causas a través de operadores de agregación.

4.1 LOS OPERADORES DE AGREGACIÓN

Los operadores de agregación sobre subconjuntos borrosos permiten producir un subconjunto borroso simple y representativo (Klir y Yuan, 1995). Formalmente cualquier

operador de agregación sobre n subconjuntos borrosos ($n > 2$), está definido por la función:

$$h: [0,1]^n \rightarrow [0,1] \quad (3)$$

Cuando h se aplica sobre los conjuntos borrosos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, definidos en X , la función h opera sobre los grados de pertenencia de esos conjuntos, produciendo un subconjunto borroso agregado A . Entonces, $A(x) = h(A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x)) \forall x \in X$.

Para ser considerado un operador de agregación, h debe satisfacer al menos los siguientes requerimientos axiomáticos:

Axioma 1. Condición de borde: $h(0, 0, 0, \dots, 0) = 0$ y $h(1, 1, 1, \dots, 1) = 1$

Axioma 2. Que h sea monótonamente creciente en todos sus argumentos. Es decir dados $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ y $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$, tales que, $a_i, b_i \in [0,1]$ si $a_i \leq b_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, entonces, $h(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \leq h(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$

Axioma 3. Que h sea una función continua.

Además, usualmente, también se deben satisfacer dos requerimientos axiomáticos adicionales.

Axioma 4. Que h sea una función simétrica en todos sus argumentos; esto es, $h(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = h(a_{p(1)}, a_{p(2)}, a_{p(3)}, \dots, a_{p(n)})$. Esto significa que, el resultado de la función h en cualquier permutación de los a_i no se modifica.

Axioma 5. Que h sea una función idempotente, es decir, $h(a, a, a, \dots, a) = a \forall a \in [0,1]$. Es decir la agregación de subconjuntos borrosos que son iguales, deben proporcionar el mismo subconjunto borroso.

Dado que cualquier operador de agregación h que cumple los axiomas 2 al 5, satisface las desigualdades: $\text{Min}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq h(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{Max}(a_1, a_2, \dots, a_n); \forall n\text{-uplas } \in [0,1]^n$.

Todas las operaciones de agregación entre la intersección borrosa estándar y la unión borrosa estándar, son idempotentes. Además las funciones h que satisfacen la condición de desigualdad son las únicas operaciones de agregación que son

idempotentes y están representadas por los llamados operadores de agregación promedio.

Operadores Promedio: cubren el intervalo completo entre las operaciones de mínimo y máximo y consiste en la media generalizada de los argumentos

$$h_{\alpha}(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha} + \dots + a_n^{\alpha}) / n)^{1/\alpha}; \text{ donde } \alpha \in \mathbb{P} \ (\alpha \neq 0) \text{ y} \quad (4)$$

$$a_i \neq 0, \forall i$$

Cuando α tiende a 0, $h_{\alpha}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tiende a la media geométrica, cuando α tiende a (-1), $h_{\alpha}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tiende a la media armónica, cuando α tiende a 1, $h_{\alpha}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tiende a la media aritmética. La función h_{α} representa una clase parametrizada de operaciones de agregación continuas, simétricas e idempotentes.

Los Operadores OWA (Ordered Weighted Averaging Operations). Es otra clase de operadores de agregación que cubre el intervalo completo entre las operaciones de mínimo y de máximo, donde $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $w_i \in [0, 1]$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y además, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$; entonces, una operación OWA asociada con w , se puede asociar a la función: $h_w(a_1, a_2, \dots, a_n) = w_1 b_1 + w_2 b_2 + \dots + w_n b_n$, donde el vector (b_1, b_2, \dots, b_n) es el vector (a_1, a_2, \dots, a_n) en el cual los elementos son ordenados, de mayor a menor, $b_i \geq b_j$ si $i < j$.

De acuerdo a lo demostrado en Klir y Yuan (1995); Klir y Folger (1992); Dubois y Prade (1985); Yager (1993), etc., los operadores OWA (h_w), satisfacen los axiomas 1 a 5 y consecuentemente las funciones de desigualdad.

Yager (2002) analiza cómo caracterizar a los operadores OWA e incorpora un nuevo atributo llamado divergencia e introduce el HOWA (Heavy OWA). En este operador relaja las restricciones del vector de ponderaciones. También, Yager (2004) extiende el análisis de operadores OWA incorporando una nueva clase de operadores llamados GOWA (Generalized OWA), que incorporan un parámetro adicional que controla la potencia de crecimiento de los argumentos. Asimismo en Yager (2009) y Yager y

Ajajlan (2014) entre otros, se proponen criterios para priorizar y caracterizar los operadores OWA.

4.2 PROPUESTA DE AGRUPACIÓN Y MONITOREO DE CAUSAS

En este apartado se propone la utilización de operadores de agregación OWA, que satisfacen la desigualdad $\text{Min}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq h(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{Max}(a_1, a_2, \dots, a_n); \forall n$ -uplas $\in [0,1]^n$; considerando $n = 1$.

Es decir, estimada la matriz $\mathfrak{R}(r_{ij})$; considerando a $A = \{1, 2, \dots, a\}$ áreas claves definidas en el Balanced Scorecard y las causas estimadas, se estiman tres matrices \mathfrak{R} para valores de incidencia de causas mínimo, máximo y promedio ($\mathfrak{R}_{ik}^{\text{Min}}$; $\mathfrak{R}_{ik}^{\text{Max}}$; $\mathfrak{R}_{ik}^{\text{Prom}}$). Se agrupan las causas de la matriz agregada \mathfrak{R} para estos tres posibles niveles de incidencia para poder sintetizar los factores generadores de enfermedades.

Esta metodología de agrupación de causas a partir de valores de los coeficientes r_{ij} máximos, mínimos y promedio permite detectar los factores de mayor incidencia y complementar la tarea del experto en el monitoreo. Dado $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_{ij}\}$, se obtiene la matriz $\mathfrak{R}^{\text{Prom}}$ aplicando la media aritmética al conjunto de causas dentro del área a monitorear ($\mathfrak{R}_{ia}^{\text{Prom}} = (1/n)\sum r_{ij}$); mientras que las matrices \mathfrak{R} con valores de pertenencia máximo y mínimo ($\mathfrak{R}_{ia}^{\text{Max}}$ y $\mathfrak{R}_{ia}^{\text{Min}}$) se estiman a través de la selección del máximo ($\mathfrak{R}_{ia}^{\text{Max}} = \text{Max}(r_{ij})$) y del mínimo ($\mathfrak{R}_{ia}^{\text{Min}} = \text{Min}(r_{ij})$) valores de incidencia de los r_{ij} dentro de cada grupo de causas.

Es decir,

$$r_{ia}^{\text{Prom}} = (1/n)\sum(r_{i1} + r_{i2} + \dots + r_{ij}); r_{ia}^{\text{Max}} = \text{Max}(r_{i1}; r_{i2}; \dots; r_{ij}); r_{ia}^{\text{Min}} = \text{Min}(r_{i1}; r_{i2}; \dots; r_{ij})$$

Esta agrupación permite realizar la predicción $P' = Q \alpha \mathfrak{R}$; es decir $p'_{hj} = \text{max}(\text{min}(q_{hi}, r_{ij}))$ para los tres posibles niveles de incidencia de las causas dentro de cada área clave, y de esta forma estimar las matrices de incidencia de causas (enfermedades) de las empresas en sus tres niveles de pertenencia (mínimos (P^{Min}), máximos (P^{Max}) y promedio (P^{Prom})).

$$p'_{ia}^{\text{Min}} = \Lambda [(q_{ih} \alpha r_{h1}^{\text{min}}), (q_{ih} \alpha r_{h2}^{\text{min}}), \dots, (q_{ih} \alpha r_{ha}^{\text{min}}),$$

$$p'_{ia}{}^{Max} = \Lambda [(q_{ih} \alpha r^{max}_{h1}), (q_{ih} \alpha r^{max}_{h2}), \dots, (q_{ih} \alpha r^{max}_{ha}),$$

$$p'_{ia}{}^{Prom} = \Lambda [(q_{ih} \alpha r^{prom}_{h1}), (q_{ih} \alpha r^{prom}_{h2}), \dots, (q_{ih} \alpha r^{prom}_{ha}),$$

De esta forma se agrupan las múltiples causas detectadas en el diagnóstico o la predicción de la situación de la empresa en áreas claves, que facilitan la labor del analista al reducir la cantidad de información necesaria para el análisis. Una vez detectado el indicador de alerta en algún área de la empresa, estas áreas claves pueden desagregarse en cada una de las causas o factores originarios de los problemas y así poder evaluar y corregir la situación. Esta opción de monitoreo a través de áreas claves (consistentes con las estimaciones desagregadas del modelo) permite un seguimiento continuo e integral de las distintas áreas de la empresa.

5. ÍNDICE DE BONDAD

Como hemos expuesto en la sección 1, el modelo de Vigier y Terceño (2008), al igual que otros fuzzy, carecen de un mecanismo de verificación de la capacidad de predicción de sus estimaciones. En este sentido proponemos incorporar un índice de soluciones aproximadas que permite verificar si las causas estimadas a través del modelo representan el estado de situación de la empresa.

Para esto, adaptamos el índice de igualdad de Brignole et al. (2001), que propone la comparación de dos conjuntos borrosos. Es decir, la comparación entre el conjunto de causas originales (P^*) agrupadas en valores de incidencia mínimos ($P^*_{ha}{}^{Min} = \text{Min}(p_{ha})$), máximos ($P^*_{ha}{}^{Max} = \text{Max}(p_{ha})$) y, promedio ($P^*_{ha}{}^{Prom} = (1/n) \sum (p_{ha})$) y el conjunto de causas estimadas (P').

$$[P^* = P] = 1 - \frac{1}{n} \sum_{x \in X} |\mu_{P^*}(x) - \mu_P(x)| \quad (5)$$

por lo tanto,

$$[(P^*_{ha}) = (P'_{h'a})]^{Min} = [1 - 1/n \sum (|p^*_{h1} - p'_{h1}| + |p^*_{h2} - p'_{h2}| + \dots + |p^*_{ha} - p'_{ha}|)]$$

$$[(P^*_{ha}) = (P'_{h'a})]^{Max} = [1 - 1/n \sum (|p^*_{h1} - p'_{h1}| + |p^*_{h2} - p'_{h2}| + \dots + |p^*_{ha} - p'_{ha}|)]$$

$$[(P^*_{ha}) = (P'_{h'a})]^{Prom} = [1 - 1/n \sum (|p^*_{h1} - p'_{h1}| + |p^*_{h2} - p'_{h2}| + \dots + |p^*_{ha} - p'_{ha}|)]$$

donde,

P_{ha}^{*Min} selecciona el mínimo grado de incidencia dentro del grupo de causas para cada empresa, P_{ha}^{*Max} selecciona el máximo grado de incidencia dentro del grupo de causas para cada empresa, y P_{ha}^{*Prom} muestra el promedio de las causas dentro del grupo ó área clave a monitorear.

Este test nos permite identificar cuál es el mejor mecanismo de agrupación de causas (por valores de incidencia máximos, mínimos ó promedio) y el grado de ajuste de las predicciones a las enfermedades presentes en las empresas. Es decir verificar la capacidad del modelo para predecir situaciones de insolvencia.

6. ESTIMACIÓN DEL MODELO

En este apartado se presenta la aplicación del modelo presentado por Vigier y Terceño (2008) de diagnóstico empresarial a una muestra de pequeñas y medianas empresas (PyMEs). Se selecciona el sector construcción compuesto por dos subsectores: la construcción y la venta de materiales para la construcción. Sobre una base de 98 empresas PyMEs constructoras y de venta de materiales registradas en los municipios de Bahía Blanca y Punta Alta (Argentina) se seleccionan 15 empresas, que representan aproximadamente el 15% de la actividad en estas dos ciudades⁴.

Esta actividad presenta un gran dinamismo y una importante variedad de empresas (sanas y enfermas) que cumplen con los requisitos de disponibilidad de información necesarios para realizar la estimación del modelo. Este sector explica aproximadamente el 10% del empleo formal de Bahía Blanca y el 1% del PIB, además de generar efectos multiplicadores que impactan sobre la economía local (IAE, 112 y 137).

Para la aplicación del modelo seguiremos las siguientes etapas:

- a) Selección del sector y empresas a analizar ($E=\{E_h\}$, donde $h= 1, 2, \dots, 15$)
- b) Recolección de la información para los tres períodos analizados ($T = \{T_k\}$, donde $k = 2008, 2009$ y 2010) a través del diseño de un cuestionario normalizado que permite detectar las causas de posibles enfermedades en las empresas, a través de etiquetas lingüísticas. La recolección de

⁴ Si se consideran sólo las empresas constituidas en sociedades formales, que son las únicas obligadas a presentar estados contables, el porcentaje de representación es cercano al 30%.

información se realiza mediante entrevistas a 15 expertos de las empresas, que mantienen una antigua relación con la empresa evaluada. Por las características de las PyMEs argentinas, este rol lo cumplen los asesores contables, los administradores y los propietarios de la empresa.

- c) Sistematización y análisis de la información de las entrevistas a expertos y de los estados contables.
- d) Selección y estimación de los ratios económico financieros ($S = \{S_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 41$). Se escogen 41 ratios que reflejan aspectos de rentabilidad, productividad, liquidez, endeudamiento, solvencia, estructura financiera, cobertura de deudas, estructura económica, actividad, rotación, eficiencia y autofinanciación de acuerdo a las clasificaciones propuestas por Somoza (2001), González *et al.*, (2002), Mures y García (2004), Veres *et al.* (2009), Colauto *et al.* (2009), entre otros; y su frecuencia de utilización en los modelos de predicción.
- e) Construcción de la matriz cardinal de síntomas para las 15 empresas y los 41 ratios seleccionados ($S_{ih} = 41 \times 15$)
- f) Estimación de la matriz de pertenencia de síntomas ($Q_{ih} = 41 \times 15$), de acuerdo a la metodología presentada en el apartado 2.
- g) Selección de las causas generadoras de problemas en las empresas a partir la metodología propuesta de integración del modelo de diagnóstico fuzzy y la teoría del Balanced Scorecard (BSC) presentada en Terceño *et al* (2009 y 2012) ($C = \{C_j\}$, donde $j = 1, 2, \dots, 72$)
- h) Construcción de la matriz de pertenencia de causas medibles objetiva y subjetivamente ($P_{hj} = 15 \times 72$), siguiendo lo expuesto en el apartado 2.
- i) Estimación de la matriz R de conocimiento económico financiero para los 3 períodos ($R_{ij}^k = 41 \times 72$; $k = 1, 2, 3$) a través de la operación entre la matriz transpuesta de pertenencia de síntomas y la matriz de pertenencia de causas que satisface la menor relación ($R_{ij} = (Q_{ih}^{-1} \alpha P_{hj})$) y aplicando el operador α definido.
- j) De acuerdo a las recomendaciones presentadas por Vigier y Terceño (2012), una vez obtenidos los coeficientes de incidencia r_{ij} , se aplica el método de filtrado para el tratamiento de inconsistencias. Se aplican dos niveles de filtro ($\phi^* = 0.75$ y $\phi^* = 0.50$), se eliminan las empresas con menor nivel de incidencia

hasta que $\phi < 0.75$. Luego, en segunda instancia, al observar muy poca variabilidad de cada causa en las empresas, se aplica un factor de filtrado más alto ($\phi^* = 0.50$) que permite reducir el error y descartar un mayor porcentaje de respuestas inconsistentes. La aplicación del método de filtrado no evidencia patrones de eliminación de empresas en función de la actividad desarrollada dentro del sector o el tamaño de la empresa sino simplemente elimina casos considerados como “anómalos” para el modelo.

- k) También para evaluar las respuestas, se aplica el coeficiente de variación para determinar la variabilidad de las causas. Cuanto mayor es el valor, mayor es la heterogeneidad de las respuestas, observándose valores del índice relativamente altos.

$$C_V = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i} \quad (6)$$

- l) La estimación de la matriz agregada \mathfrak{R} ($\mathfrak{R}_{ij} = 41 \times 72$) válida para realizar pronósticos, supone la repetición de los pasos c) a k) para los tres períodos analizados (T_1 , T_2 y T_3). El cálculo de \mathfrak{R} implica la agregación de las matrices $R_k = [r_{ij}]_k = (R_{ij}^1, R_{ij}^2, R_{ij}^3)$ y la corrección por tendencias que distorsionan la validez temporal de los resultados. Como se menciona en Vigier y Terceño (2008) si se verifica una tendencia creciente en el tiempo de un r_{ij} , la utilización de un procedimiento de agregación "promedio" subestimaría la verdadera relación. En cambio si la tendencia es decreciente, el promedio sobrestimaría la relación. Por esta situación, se evalúa el comportamiento de cada r_{ij} , con el fin de determinar el procedimiento de agregación en función de la tendencia que experimenta cada componente.

- Si $\sum [r_{ij}^t - r_{ij}^{t-1}] = 0$; $r_{ij}^t = r_{ij}$ agregado
- Si $\sum [r_{ij}^t - r_{ij}^{t-1}] \neq 0$; r_{ij} se determina a través del indicador de tendencia ξ , que varía entre 1 y -1.

$$\xi = \frac{\sum_{k=2}^t ([r_{ij}]_k - [r_{ij}]_{k-1})}{\sum_{k=2}^t |[r_{ij}]_k - [r_{ij}]_{k-1}|} \quad (7)$$

Si $\xi = 1$, $r_{ij} = \text{Max} (\text{Min} [r_{ij}]_k)$; entonces existe tendencia creciente.

Si $\xi = -1$, $r_{ij} = \text{Min} (\text{Max} [r_{ij}]_k)$; entonces existe tendencia decreciente.

Si $-1 < \xi < 1$, $r_{ij} = 1/t \sum [r_{ij}]_k$; entonces no hay tendencia.

La agregación y el análisis de tendencia se realiza para la matriz agregada \mathfrak{R} ($\mathfrak{R}_{ij} = 41 \times 72$). Se detecta que en 349 r_{ij} se observa tendencia creciente; en 337 r_{ij} se manifiesta una tendencia decreciente; mientras que en los 2.266 componentes r_{ij} restantes se concluye que no existe tendencia, realizando la agregación a través de la media aritmética.

Es decir a través de la aplicación del modelo se estiman coeficientes r_{ij} que representan la relación entre causas y síntomas, son consistentes y válidos temporalmente de acuerdo a los postulados del modelo.

7. VERIFICACIÓN EMPÍRICA DE LA PROPUESTA DE AGRUPACIÓN

Se realiza aplicando los siguientes pasos:

- i) Aplicación a P de los operadores de agregación propuestos de incidencia mínima, máxima y promedio para obtener matrices agrupadas de causas que reflejen estas tres categorías (P^{*Min} ; P^{*Max} ; P^{*Prom}). El apéndice A muestra las tres matrices (P^*).

Por ejemplo, tomando como referencia la matriz de pertenencia de causas de la empresa 1, se agrupan las causas ($p_1, p_2, \dots, p_{10}, \dots, p_{15}$) en una única causa (p^*_1) que refleje los problemas relacionados con el aprendizaje empresarial.

Es decir,

$$P^*_{11}{}^{Prom} = (1/15) \sum (0.25 + 1.00 + 0.50 + 0.20 + 0.20 + 0.50 + 0.86 + 0.33 + 0.29 + 0.43 + 0.29 + 0.36 + 1.00 + 0.20 + 0.43) = 0.46$$

$$P^*_{11}{}^{Max} = \text{Max} (0.25; 1.00; 0.50; 0.20; 0.20; 0.50; 0.86; 0.33; 0.29; 0.43; 0.29; 0.36; 1.00; 0.20; 0.43) = 1.00$$

$$P^*_{11}{}^{Min} = \text{Min} (0.25; 1.00; 0.50; 0.20; 0.20; 0.50; 0.86; 0.33; 0.29; 0.43; 0.29; 0.36; 1.00; 0.20; 0.43) = 0.20$$

- ii) Aplicación de los operadores de agregación a \mathfrak{R} , para estimar las enfermedades de las empresas agrupadas por áreas claves ($\mathfrak{R}_{ij}^{\text{Min}} = \text{Min}(r_{ij})$); $\mathfrak{R}_{ij}^{\text{Max}} = \text{Max}(r_{ij})$; $\mathfrak{R}_{ij}^{\text{Prom}} = (1/n) \sum r_{ij}$), a través de $P' = Q \cdot \alpha \mathfrak{R}$; es decir, $p'_{hj} = \text{max}(\text{min}(q_{hi}, r_{ij}))$. Es decir a través de esta metodología se estiman tres nuevas matrices de causas estimadas en valores de pertenencia mínimos (P'_{ha}^{Min}), máximos (P'_{ha}^{Max}) y promedio (P'_{ha}^{Prom}) (véase apéndice B)

Por ejemplo, el nivel de pertenencia de la causa p'_{11}^{Max} para el agregado, se obtiene al operar la primera fila de la matriz Q con la primera columna de la matriz $\mathfrak{R}^{\text{Max}}$, es decir $p'_{11} = Q(1 \times 41) \alpha \mathfrak{R}^{\text{Max}}(41 \times 1) = \square p'_{11}(1 \times 1)$.

$$p'_{11}^{\text{Max}} = \Lambda [(0.60 \alpha 0.50), (0.67 \alpha 0.50), \dots, (0.80 \alpha 0.60), \dots, (0.80 \alpha 0.57)]$$

$$p'_{11}^{\text{Max}} = \text{Max} [(0.50), (0.50), \dots, (0.60), \dots, (0.57)] = 0.60$$

De la misma forma estimamos p'_{11}^{Prom} y p'_{11}^{Min} operando la primera fila de la matriz Q con la primera columna de la matriz Q^{Prom} y $\mathfrak{R}^{\text{Min}}$ respectivamente.

$$p'_{11}^{\text{Prom}} = \Lambda [(0.60 \alpha 0.29), (0.67 \alpha 0.28), \dots, (0.93 \alpha 0.28), \dots, (0.80 \alpha 0.29)]$$

$$p'_{11}^{\text{Prom}} = \text{Max} [(0.29), (0.28), \dots, (0.28), \dots, (0.29)] = 0.34$$

y,

$$p'_{11}^{\text{Min}} = \Lambda [(0.60 \alpha 0.14), (0.67 \alpha 0.14), \dots, (0.13 \alpha 0.14), \dots, (0.80 \alpha 0.14)]$$

$$p'_{11}^{\text{Min}} = \text{Max} [(0.14), (0.14), \dots, (0.14), \dots, (0.14)] = 0.14$$

- iii) Estimamos el índice de bondad de la agrupación de causas, mediante la comparación de los dos subconjuntos borrosos P^* y P' . De esta forma verificamos la reducción de causas en áreas claves de monitoreo y evaluamos el grado de ajuste de la estimación a las respuestas de los expertos.

Por ejemplo para la empresa 1:

$$[(P^*) = (P')]^{\text{Min}} = 1 - 1/14 \sum (|0.20 - 0.14| + |0.12 - 0.13| + |0.57 - 0.56| + |0.20 - 0.20| + |0.13 - 0.19| + |0.20 - 0.40| + |0.20 - 0.60| + |0.13 - 0.13| + |0.20 - 0.26| + |0.43 - 0.43| + |0.20 - 0.20| + |0.20 - 0.20| + |0.20 - 0.14| + |0.27 - 0.24|) = 0.94$$

$$[(P^*) = (P')^{\text{Max}} = 1 - 1/14 \sum (|1.00 - 0.60| + |0.57 - 0.57| + |0.83 - 0.61| + |0.67 - 0.67| + |1.00 - 0.93| + |1.00 - 0.62| + |1.00 - 0.80| + |1.00 - 1.00| + |0.37 - 0.31| + |0.83 - 0.73| + |0.50 - 0.51| + |1.00 - 0.93| + |1.00 - 0.67| + |0.86 - 0.80|) = 0.86$$

$$[(P^*) = (P')^{\text{Prom}} = 1 - 1/14 \sum (|0.46 - 0.34| + |0.27 - 0.35| + |0.71 - 0.57| + |0.46 - 0.47| + |0.43 - 0.47| + |0.70 - 0.51| + |0.60 - 0.70| + |0.47 - 0.47| + |0.29 - 0.26| + |0.61 - 0.58| + |0.29 - 0.37| + |0.72 - 0.61| + |0.64 - 0.35| + |0.55 - 0.49|) = 0.91$$

A través de esta simulación se confirma que el mejor ajuste se obtiene a través de la agrupación por valores de incidencia mínimos en las causas, que son los que reflejan un índice de igualdad más alto, con un grado de ajuste del 93% según se detalla en la tabla 1. La obtención del mejor ajuste a través de incidencias mínimas es concordante con las teorías menos adversas al riesgo en términos de alertas y análisis de resultados, además de convalidar las propiedades de la t- norma del mínimo sobre las otras reglas de decisión.

Tabla 1. Grado de ajuste considerando varios períodos $[(P^*) = (P')]$

Empresa	Min. (P' Min)	Max. (P' Max)	Promedio (P' Prom)
1	0.94	0.86	0.91
2	0.98	0.82	0.93
3	0.97	0.86	0.94
4	0.93	0.89	0.93
5	0.95	0.89	0.92
6	0.92	0.84	0.88
7	0.91	0.80	0.88
8	0.92	0.82	0.87
9	0.96	0.85	0.88
10	0.91	0.82	0.87
11	0.88	0.80	0.90
12	0.91	0.85	0.87
13	0.90	0.86	0.91
14	0.93	0.89	0.89
15	0.95	0.90	0.92
Promedio	0.93	0.85	0.90

Este índice de soluciones aproximadas se aplica a los resultados estimados para el último período y para el agregado, encontrando un grado de ajuste muy similar (93%) por lo tanto se puede inferir que para períodos no muy extensos (3 años), las relaciones de incidencia prácticamente no presentan modificaciones, por lo tanto la

matriz R (comparada con \mathfrak{R}) tiene validez temporal para diagnósticos y pronósticos en el medio plazo.

8. CONCLUSIONES

Con este trabajo proponemos enriquecer el modelo de Vigier y Terceño (2008) incorporando un mecanismo de agrupación de causas a través de operadores de agregación que permiten sintetizar las enfermedades de las empresas y facilitar la labor del analista. Este análisis, implica una ventaja en la predicción de enfermedades ya que supone la reducción del mapa general de enfermedades de las empresas en áreas claves, detectadas a partir del Balanced Scorecard y agrupadas de acuerdo a operadores de agregación (máximos, mínimos y promedio). Es decir, una vez detectado algún indicador de alerta se pueden desagregar las áreas claves en los múltiples factores originarios de problemas para evaluar y corregir la situación de la empresa. Esta metodología novedosa de agrupación de causas a partir de valores máximos, mínimos y promedio permite detectar los factores de mayor incidencia para un monitoreo global y continuo de la empresa.

Además de esta propuesta de agrupación de causas, en el trabajo se desarrolla una propuesta de verificación de la bondad de agrupación a través de soluciones aproximadas que testea la capacidad del modelo para predecir enfermedades y convalida la superioridad de la t - norma del mínimo sobre las otras reglas de decisión.

Además, se presenta una estimación empírica del modelo de diagnóstico de Vigier y Terceño (2008), que permite verificar su funcionamiento y capacidad para diagnosticar y predecir situaciones futuras en empresas. Es decir, a partir de la estimación de las interrelaciones entre causas y efectos significativos, con un alto grado de aproximación, calculamos un conjunto de niveles de incidencia (r_{ij}) consistentes y significativos que explican la verdadera relación entre síntomas y enfermedades (efectos y causas). Y por lo tanto la matriz \mathfrak{R} resulta de utilidad para simular o modelizar el conocimiento del experto a la hora de realizar pronósticos.

En síntesis, en este trabajo se propone avanzar en el análisis de las causas del fracaso, sintetizando la importancia de las causas en áreas claves, incluyendo una

metodología que permita evaluar la bondad de la agrupación de las causas y por último aplicar y testear la propuesta de mejora a la estimación empírica del modelo.

REFERENCIAS

- ALTMAN, E. (1968). "Financial ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy". *Journal of Finance*, Vol. 23, No. 4, p. 589-609.
- ARGENTI, J. (1976). *Corporate Collapse: The Causes and Symptoms*. New York. John Wiley and Sons.
- ARGENTI, J. (1983). "Prediction Corporate Failure". *Accountants Digest*, No. 138, p. 1-25. Institute of Chartered Accountants in England and Wales, London.
- ARIAS-ARANDA, D.; CASTRO, J. L.; NAVARRO, M.; SÁNCHEZ, J. M.; ZURITA, J. M. (2010). "A fuzzy expert system for business management". *Expert Systems with Applications*, Vol. 37, No. 12, p. 7570-7580.
- BALCAEN, S.; OOGHE, H. (2006). "35 Years of Studies on Business Failure: An Overview of the Classic Statistical Methodologies and their Related Problems". *British Accounting Review*, Vol. 38, No. 1, p. 63-93.
- BEAVER, W. (1966). "Financial Ratios as Predictors of Failure". *Journal of Accounting Research (Selected Studies)*, Vol. 4, p. 71-111.
- BEHBOOD, V.; LU, J.; ZHANG, G. (2010). "Adaptive Inference-based learning and rule generation algorithms in fuzzy neural network for failure prediction". *Proceedings of IEEE International Conference of Intelligent Systems and Knowledge Engineering*, November, p. 33-38.
- BEHBOOD, V.; LU, J. (2011). "Intelligent financial warning model using fuzzy neural network and case-based reasoning". *Proceedings of IEEE Symposium on Computational Intelligence for Financial Engineering and Economics*, April, p. 1-6.
- BRIGNOLE, D.; ENTIZNE, R.; VIGIER, H. (2001). "Análisis de Soluciones Aproximadas de Relaciones Binarias Fuzzy", *Proceedings of VIII SIGEF Congress*, Naples (Italy), September, p. 20-21.
- COLAUTO, R.; TABOADA, E.; LIMA, J. (2009). "Información contable en la predicción de insolvencia: Estudio inferencial univariante aplicado a empresas españolas". *Revista Contemporánea de Contabilidad*, Vol. 6, No. 12, p. 151-170.
- DELCEA, C.; SCARLAT, E. (2009). "The Diagnosis of Firm's Disease Using the Grey Systems Theory Methods", *Proceedings of IEEE International Conference of GSIS*. Nanjing (China), November, p. 755-762.

- DELCEA, C.; SCARLAT, E.; MARACINE, V. (2012). "Grey relational analysis between firm's current situation and its possible causes: A bankruptcy syndrome approach". *Grey Systems: Theory and Application*, Vol. 2, No. 2, p. 229-239.
- DELCEA, C.; SCARLAT, E.; COTFAS, L. A. (2013). "Companies' quality characteristics vs their performance: A grey relational analysis- evidence from Romania". *Grey Systems: Theory and Application*, Vol. 3, No. 2, p. 129-141.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. (1985). "A review of fuzzy set aggregation connectives". *Information Science*, Vol. 36, No. 1-2, p. 85-121.
- DUBOIS, D. ; PRADE, H. (1985). "A review of fuzzy set aggregation connectives". *Information Science*, Vol. 36, No. 1-2, p. 85-121.
- EDMISTER, R. (1972). "An Empirical Test of Financial Ratio Analysis for Small Business Failure Prediction". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 7, No. 2, p. 1477-1493.
- GIL ALUJA, J. (1990). "Ensayo sobre un Modelo de Diagnóstico Económico-Financiero". *Proceedings of the V Jornadas Hispano- Lusas de Gestión Científica*. Vigo (Spain), p. 26-29.
- GIL LAFUENTE, J. (1996). "El Control de las Actividades de Marketing". *Proceedings of III SIGEF Congress*. Buenos Aires (Argentina), Vol. 244, p. 1-21.
- GONZÁLEZ, A.; CORREA A.; ACOSTA, M. (2002). "Factores determinantes de la rentabilidad financiera de las PyMEs". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol. 31, No. 112, p. 395-429.
- JONES, F.L. (1987). "Current Techniques in Bankruptcy Prediction". *Journal of Accounting Literature*, Vol. 6, No. 1, p. 131-164.
- KEASEY, K.; WATSON, R. (1987). "Non financial symptoms and the prediction of small company failure: a test of Argenti's hypothesis". *Journal of Business, Finance and Accounting*, Vol. 14, No. 3, p. 335-354.
- KLIR, G.; YUAN, B. (1995). *A review of Fuzzy sets and Fuzzy logic: Theory and Applications*, New Jersey, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River.
- KLIR, G.; FOLGER, A. (1988). *Fuzzy sets, Uncertainty, and Information*. New York, Prentice-Hall International.
- MARACINE V.; DELCEA C. (2009). "How we can diagnose the firm's diseases using grey systems theory", *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, Vol. 3, p. 39-55.

- MORA ENGUÍDANOS, A. (1994). "Limitaciones metodológicas de los trabajos empíricos sobre la predicción del fracaso empresarial". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol. 24, No. 80, p. 709-732.
- MURES M.; GARCÍA, A. (2004). "Factores determinantes del fracaso empresarial en Castilla y León". *Revista de Economía y Empresa*, Vol. 21, No. 51, p. 95-116.
- OHLSON, J. (1980). "Financial Ratios and the Probabilistic Prediction of Bankruptcy". *Journal of Accounting Research*, Vol. 18, No. 1, p. 109-131.
- PORTER, M. (1991). *La Ventaja Competitiva de las Naciones*. Buenos Aires, Vergara Eds.
- REGIONAL CENTER FOR ECONOMIC STUDIES BAHÍA BLANCA- ARGENTINA (CREEBBA), *Economic Activity Report*, 112 and 137, last access 12 January 2015. Available at http://www.creebba.org.ar/main/index.php?op=archivo_iae
- SÁNCHEZ, E. (1982). "Solution of Fuzzy Equations with Extended Operations", *Electronics Reserach Laboratory*, University of California, Berkeley, p. 8-10.
- SCARLAT, E.; DELCEA, C.; MARACINE, V. (2010). "Genetic-fuzzy-grey algorithms: a hybrid model for establishing companies' failure reasons". *Proceedings of IEEE International Conference (SMC)*, Istanbul (Turkey), p. 955-962.
- SCARLAT, E.; DELCEA, C. (2011). "Complete analysis of bankruptcy syndrome using grey systems theory". *Grey Systems: Theory and Application*, Vol. 1, No. 1, p. 19-32.
- SCHERGER, V., VIGIER, H., BARBERÁ- MARINÉ, G. (2014). "Finding business failure reasons through a fuzzy model of diagnosis". *Fuzzy Economic Review*, Vol. 19, No. 1, p. 45-62.
- SOMOZA LÓPEZ, A. (2001). "La consideración de factores cualitativos, macroeconómicos y sectoriales en los modelos de predicción de la solvencia empresarial". *Papeles de Economía Española*, Vol. 89/90. p. 402-426.
- TASCÓN, M.; CASTAÑO F. (2012). "Variables y modelos para la identificación y predicción del fracaso empresarial: Revisión de la investigación empírica reciente". *RC- SAR*, Vol. 15, No. 1, p. 7-58.
- THAPAR, A.; PANDEY, D.; GAUR, S. K. (2009). "Optimization of linear objective function with max-t fuzzy relation equations". *Applied Soft Computing*, Vol. 9, No. 3, p. 1097-1101.
- TERCEÑO, A; VIGIER, H; BARBERÁ MARINÉ G; SCHERGER, V. (2009). "Hacia una integración de la Teoría del Diagnóstico Fuzzy y del Balanced Scorecard". *Proceedings of XV SIGEF Conference Economic and Financial Crisis*. New Challenges and

- Perspectives”, Lugo (Spain), October, p. 364-379.
- TERCEÑO, A.; VIGIER, H. (2011). “Economic- Financial Forecasting Model of Businesses using Fuzzy Relations”, *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, Vol. 45, No. 1, p. 215- 232.
- TERCEÑO, A.; VIGIER, H.; SCHERGER, V. (2012). “Application of a fuzzy model of economic- financial diagnosis to SMEs”, in: Gil Aluja., J.; Terceño, A. (eds.). *Methods for Decision making in an uncertain enviroment*, p. 146-162. Singapore, Series on Computer Engineering and Information Science (6), World Scientific Publishing.
- TERCEÑO, A, VIGIER, AND SCHERGER, V. (2014). “Identificación de las causas en el diagnóstico empresarial mediante relaciones Fuzzy y el BSC”. *Actualidad Contable Fases*, Vol. 17, No. 28, p. 101-118.
- VERES, J.; LABATUT, G.; POZUELO, J. (2009). “Hacia una ordenación de las pequeñas empresas atendiendo a su posible situación de fracaso”. *Estudios de Economía Aplicada*, 27, No. 3, p. 1-18.
- VIGIER, H.; TERCEÑO, A. (2008). “A model for the prediction of diseases of firms by means of fuzzy relations”. *Fuzzy Sets and System*, 159, Vol. 17, No.1, p. 2299- 2316.
- VIGIER, H.; TERCEÑO, A. (2012). “Analysis of the inconsistency problem in the model for predicting “diseases” of firms”. *Fuzzy Economic Review*, Vol. 17, No. 1, p. 73-88.
- YAGER, R. R. (1993). “Families of OWA Operators”, *Fuzzy Sets and Systems*, No. 59, p. 125-148.
- YAGER, R. R. (2002). “Heavy OWA Operators”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol. 1, No. 4, p. 379-397.
- YAGER , R. R. (2004). “Generalized OWA Aggregation Operators”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol. 3, No. 1, p. 93-107
- YAGER, R. R. (2009). “Prioritized OWA aggregation”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol. 8, No. 3, p. 245-262.
- YAGER, R. R.; ALAJLAN, N. (2014). “On characterizing features of OWA aggregation operators”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol. 13, No. 1, p. 1-32.
- ZAVGREN, C. (1983). “The prediction of Corporate Failure: The State of Art”. *Journal of Accounting Literature*, Vol. 2, p.1-37.
- ZIMMERMANN, H.J. (1987). *Fuzzy sets, decision making and expert systems*. Boston, Kluwer Academic Publishers, Norwell, p. 41-44.
- ZIMMERMANN, H.J. (1991). *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

ZMIJEWSKI, M. (1984). "Methodological Issues Related to the Estimation of Financial Distress Prediction Models". *Journal of Accounting Research*, p. 59-86.

APÉNDICE A

Matriz agrupada de causas ($P^{* \text{Max}}$)

Áreas clave	Aprendizaje y crecimiento				Operativa			Comercial				Económica- financiera		
	Aprendizaje empresarial	Innovación y tecnología	Calidad de mano de obra	Optimización de costos	Eficiencia técnica	Política de compras	Cambios exógenos	Gestión comercial	Satisfacción del cliente	Calidad y precios	Evolución sectorial	Uso de activos	Gestión del riesgo	Resultados de actividad
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
E1	1.00	0.57	0.83	0.67	1.00	1.00	1.00	1.00	0.37	0.83	0.50	1.00	1.00	0.86
E2	0.83	0.57	0.75	0.33	1.00	0.71	0.60	1.00	0.31	0.57	0.33	1.00	0.36	0.67
E3	0.73	0.53	0.79	0.83	0.73	0.71	0.80	1.00	0.40	0.71	0.75	1.00	0.83	0.71
E4	0.83	0.29	0.67	0.83	0.87	0.71	0.80	0.80	0.42	0.57	0.70	1.00	0.83	1.00
E5	0.71	0.57	0.83	0.50	0.73	0.64	0.80	0.79	0.37	0.73	0.63	1.00	0.67	0.72
E6	0.80	0.57	0.60	0.20	0.67	1.00	0.80	0.71	0.48	0.90	0.81	0.80	0.86	0.71
E7	0.80	0.57	0.60	0.20	0.63	1.00	0.80	0.71	0.48	0.90	0.81	0.80	0.86	0.80
E8	0.80	0.57	0.60	0.20	0.63	1.00	1.00	0.71	0.48	0.90	0.81	0.80	0.86	0.80
E9	1.00	0.63	0.80	0.67	1.00	0.71	1.00	1.00	0.40	1.00	0.75	0.80	1.00	1.00
E10	1.00	0.61	0.72	0.20	0.80	0.71	0.80	0.63	1.00	0.73	0.75	1.00	0.67	1.00
E11	1.00	0.57	1.50	0.83	0.93	0.79	0.80	0.80	0.47	0.86	0.58	0.81	0.83	1.00
E12	1.00	0.63	1.00	0.83	0.93	1.00	0.80	0.80	0.60	0.59	0.75	0.88	0.65	1.00
E13	1.00	0.63	0.80	1.00	0.80	0.71	0.80	1.00	0.43	0.83	0.75	1.00	0.83	0.69
E14	1.00	0.63	0.75	1.00	0.87	0.60	0.80	0.80	0.40	0.83	0.75	0.88	0.83	1.00
E15	0.8	0.57	0.80	0.67	0.80	0.80	0.80	0.80	0.48	0.83	0.61	1.00	0.65	1.00

Matriz agrupada de causas ($P^{* \text{Min}}$)

Áreas clave	Aprendizaje y crecimiento				Operativa			Comercial				Económica- financiera		
	Aprendizaje empresarial	Innovación y tecnología	Calidad de mano de obra	Optimización de costos	Eficiencia técnica	Política de compras	Cambios exógenos	Gestión comercial	Satisfacción del cliente	Calidad y precios	Evolución sectorial	Uso de activos	Gestión del riesgo	Resultados de actividad
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
E1	0.20	0.12	0.57	0.20	0.13	0.20	0.20	0.13	0.20	0.43	0.20	0.20	0.20	0.27
E2	0.14	0.13	0.57	0.17	0.07	0.40	0.60	0.13	0.20	0.39	0.20	0.20	0.14	0.27
E3	0.14	0.13	0.60	0.17	0.07	0.53	0.60	0.13	0.26	0.29	0.20	0.22	0.14	0.17
E4	0.14	0.13	0.14	0.20	0.13	0.40	0.40	0.25	0.40	0.43	0.20	0.20	0.14	0.27
E5	0.14	0.13	0.71	0.33	0.25	0.53	0.60	0.13	0.20	0.57	0.20	0.20	0.14	0.20
E6	0.14	0.13	0.56	0.17	0.25	0.47	0.80	0.20	0.40	0.43	0.13	0.11	0.55	0.27
E7	0.14	0.13	0.56	0.17	0.25	0.47	0.80	0.20	0.40	0.43	0.13	0.11	0.55	0.27
E8	0.14	0.13	0.56	0.17	0.25	0.47	0.80	0.20	0.40	0.43	0.13	0.11	0.55	0.27
E9	0.14	0.14	0.43	0.17	0.13	0.40	0.80	0.13	0.37	0.43	0.20	0.20	0.14	0.27
E10	0.14	0.38	0.57	0.17	0.25	0.20	0.60	0.25	0.42	0.57	0.38	0.33	0.14	0.27
E11	0.14	0.24	0.14	0.20	0.14	0.20	0.20	0.38	0.40	0.29	0.20	0.33	0.14	0.24
E12	0.20	0.57	0.71	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.52	0.57	0.20	0.20	0.14	0.27
E13	0.17	0.53	0.29	0.20	0.14	0.40	0.60	0.29	0.40	0.57	0.20	0.40	0.14	0.27
E14	0.20	0.53	0.57	0.40	0.25	0.40	0.60	0.13	0.32	0.43	0.20	0.20	0.14	0.27
E15	0.20	0.25	0.57	0.20	0.25	0.40	0.60	0.13	0.40	0.57	0.20	0.33	0.14	0.27

Matriz agrupada de causas (P* Prom)

Áreas clave	Aprendizaje y crecimiento				Operativa			Comercial				Económica- financiera		
	Aprendizaje empresarial	Innovación y tecnología	Calidad de mano de obra	Optimización de costos	Eficiencia técnica	Política de compras	Cambios exógenos	Gestión comercial	Satisfacción del cliente	Calidad y precios	Evaluación sectorial	Uso de activos	Gestión del riesgo	Resultados de actividad
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
E1	0.46	0.27	0.71	0.46	0.43	0.70	0.60	0.47	0.29	0.61	0.29	0.72	0.64	0.55
E2	0.29	0.40	0.67	0.23	0.46	0.50	0.60	0.50	0.25	0.46	0.26	0.49	0.26	0.47
E3	0.35	0.36	0.65	0.40	0.46	0.61	0.75	0.47	0.33	0.48	0.40	0.78	0.41	0.41
E4	0.45	0.19	0.52	0.51	0.46	0.54	0.65	0.54	0.41	0.48	0.38	0.59	0.48	0.58
E5	0.46	0.36	0.80	0.41	0.50	0.59	0.65	0.53	0.29	0.62	0.39	0.43	0.51	0.59
E6	0.39	0.39	0.57	0.18	0.45	0.66	0.80	0.45	0.44	0.63	0.35	0.41	0.71	0.52
E7	0.39	0.39	0.57	0.18	0.47	0.66	0.80	0.45	0.44	0.63	0.35	0.41	0.71	0.55
E8	0.39	0.39	0.57	0.18	0.47	0.66	0.85	0.45	0.44	0.63	0.35	0.41	0.71	0.55
E9	0.51	0.41	0.64	0.34	0.53	0.55	0.90	0.56	0.38	0.67	0.43	0.46	0.50	0.57
E10	0.42	0.52	0.65	0.18	0.51	0.53	0.75	0.51	0.71	0.62	0.61	0.55	0.41	0.59
E11	0.45	0.35	0.94	0.62	0.40	0.48	0.60	0.62	0.43	0.51	0.35	0.63	0.58	0.56
E12	0.59	0.59	0.85	0.62	0.43	0.70	0.70	0.57	0.56	0.58	0.43	0.69	0.42	0.56
E13	0.41	0.57	0.65	0.62	0.42	0.57	0.70	0.59	0.41	0.66	0.52	0.77	0.38	0.45
E14	0.48	0.57	0.67	0.80	0.52	0.53	0.75	0.47	0.36	0.61	0.43	0.61	0.49	0.57
E15	0.44	0.39	0.63	0.46	0.48	0.61	0.65	0.52	0.44	0.66	0.45	0.59	0.42	0.60

APÉNDICE B

Matriz estimada de pertenencia de causas (P' Max)

Áreas clave	Aprendizaje y crecimiento				Operativa			Comercial				Económica- financiera		
	Aprendizaje empresarial	Innovación y tecnología	Calidad de mano de obra	Optimización de costos	Eficiencia técnica	Política de compras	Cambios exógenos	Gestión comercial	Satisfacción del cliente	Calidad y precios	Evaluación sectorial	Uso de activos	Gestión del riesgo	Resultados de actividad
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
E1	0.57	0.57	0.61	0.67	0.87	0.80	0.80	0.93	0.31	0.83	0.51	1.00	0.83	0.67
E2	0.57	0.57	0.60	0.60	1.00	0.60	0.60	0.60	0.40	0.73	0.60	0.93	0.67	1.00
E3	0.67	0.43	0.61	0.80	1.00	0.60	0.80	0.80	0.27	0.59	0.63	0.80	0.55	1.00
E4	0.67	0.57	0.61	0.73	0.78	0.60	0.80	0.73	0.40	0.73	0.51	0.93	0.73	0.80
E5	0.83	0.57	0.60	0.67	0.63	0.60	0.80	0.80	0.40	0.73	0.63	1.00	0.67	0.92
E6	0.73	0.57	0.60	0.83	0.63	0.80	0.80	0.80	0.40	0.80	0.63	0.87	0.67	0.67
E7	0.57	0.57	0.60	0.67	0.63	0.80	0.80	1.00	0.40	0.83	0.63	1.00	0.83	0.73
E8	0.83	0.57	0.60	0.83	0.63	0.80	0.80	0.80	0.40	0.80	0.63	1.00	0.67	0.80
E9	0.67	0.57	0.61	1.00	1.00	0.60	0.80	0.87	0.33	0.83	0.63	1.00	0.83	1.00
E10	0.57	0.57	0.60	0.80	1.00	0.60	0.80	0.60	0.40	0.73	0.63	1.00	0.67	1.00
E11	0.67	0.57	0.61	0.67	0.89	0.67	0.67	0.67	0.40	0.67	0.51	0.80	0.67	0.89
E12	0.80	0.57	0.61	0.83	1.00	0.60	0.80	0.80	0.40	0.59	0.63	0.93	0.53	1.00
E13	0.67	0.57	0.61	0.93	1.00	0.60	0.80	0.80	0.40	0.83	0.63	0.93	0.83	1.00
E14	0.67	0.57	0.61	0.87	1.00	0.60	0.80	0.80	0.31	0.60	0.63	0.93	0.60	1.00
E15	0.83	0.57	0.60	0.67	0.80	0.80	0.80	0.80	0.31	0.83	0.51	1.00	0.50	1.00

Matriz estimada de pertenencia de causas (P' Min)

Áreas clave	Aprendizaje y crecimiento				Operativa			Comercial				Económica- financiera		
	Aprendizaje empresarial	Innovación y tecnología	Calidad de mano de obra	Optimización de costos	Eficiencia técnica	Política de compras	Cambios exógenos	Gestión comercial	Satisfacción del cliente	Calidad y precios	Evaluación sectorial	Uso de activos	Gestión del riesgo	Resultados de actividad
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
E1	0.14	0.13	0.56	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.20	0.43	0.20	0.20	0.14	0.24
E2	0.14	0.13	0.56	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.26	0.43	0.20	0.20	0.14	0.24
E3	0.14	0.13	0.57	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.26	0.29	0.20	0.20	0.14	0.17
E4	0.14	0.13	0.57	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.26	0.43	0.20	0.20	0.14	0.24
E5	0.14	0.13	0.57	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.26	0.43	0.20	0.20	0.14	0.24
E6	0.14	0.13	0.56	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.26	0.43	0.20	0.20	0.14	0.24
E7	0.14	0.13	0.56	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.26	0.43	0.20	0.20	0.14	0.24
E8	0.14	0.13	0.56	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.26	0.43	0.20	0.20	0.14	0.24
E9	0.14	0.13	0.57	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.26	0.43	0.20	0.20	0.14	0.24
E10	0.14	0.13	0.56	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.26	0.43	0.20	0.20	0.14	0.24
E11	0.14	0.13	0.57	0.20	0.14	0.33	0.60	0.13	0.26	0.29	0.20	0.20	0.14	0.24
E12	0.14	0.13	0.56	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.26	0.29	0.20	0.20	0.14	0.24
E13	0.14	0.13	0.57	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.26	0.43	0.20	0.20	0.14	0.24
E14	0.14	0.13	0.57	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.20	0.33	0.20	0.20	0.14	0.24
E15	0.14	0.13	0.56	0.20	0.14	0.40	0.60	0.13	0.20	0.43	0.20	0.20	0.14	0.24

Matriz estimada de pertenencia de causas (P' Prom)

Áreas clave	Aprendizaje y crecimiento				Operativa			Comercial				Económica- financiera		
	Aprendizaje empresarial	Innovación y tecnología	Calidad de mano de obra	Optimización de costos	Eficiencia técnica	Política de compras	Cambios exógenos	Gestión comercial	Satisfacción del cliente	Calidad y precios	Evaluación sectorial	Uso de activos	Gestión del riesgo	Resultados de actividad
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
E1	0.33	0.33	0.57	0.47	0.51	0.53	0.70	0.42	0.25	0.58	0.37	0.64	0.38	0.49
E2	0.32	0.33	0.57	0.51	0.47	0.51	0.60	0.42	0.33	0.58	0.35	0.65	0.38	0.49
E3	0.33	0.33	0.60	0.57	0.51	0.51	0.70	0.42	0.27	0.53	0.37	0.64	0.35	0.49
E4	0.32	0.33	0.60	0.57	0.47	0.53	0.65	0.42	0.33	0.58	0.33	0.61	0.38	0.49
E5	0.33	0.33	0.60	0.57	0.51	0.51	0.65	0.42	0.33	0.58	0.35	0.65	0.38	0.49
E6	0.33	0.33	0.57	0.51	0.41	0.53	0.70	0.42	0.33	0.58	0.35	0.65	0.38	0.49
E7	0.32	0.33	0.57	0.57	0.41	0.53	0.70	0.42	0.33	0.58	0.37	0.65	0.38	0.49
E8	0.33	0.33	0.57	0.57	0.40	0.53	0.70	0.42	0.33	0.58	0.37	0.65	0.35	0.49
E9	0.33	0.33	0.60	0.57	0.51	0.53	0.70	0.42	0.33	0.58	0.37	0.64	0.38	0.49
E10	0.32	0.33	0.57	0.53	0.47	0.51	0.70	0.42	0.33	0.58	0.37	0.61	0.38	0.49
E11	0.33	0.33	0.60	0.57	0.51	0.53	0.65	0.42	0.33	0.56	0.35	0.54	0.38	0.49
E12	0.33	0.33	0.57	0.57	0.51	0.53	0.70	0.42	0.33	0.53	0.37	0.64	0.36	0.49
E13	0.33	0.33	0.60	0.57	0.51	0.51	0.70	0.42	0.33	0.58	0.37	0.64	0.38	0.49
E14	0.33	0.33	0.60	0.57	0.51	0.51	0.70	0.42	0.25	0.56	0.37	0.64	0.36	0.49
E15	0.33	0.33	0.57	0.46	0.47	0.53	0.65	0.42	0.25	0.58	0.37	0.65	0.35	0.49